

等离子体物理导论笔记

黄晨*

2021年12月14日

写在前面：笔记根据华中科技大学魏合林教授“课堂讲义”以及李定《等离子体物理学》书写。每章末尾“作业及参考答案”章节中的习题来自课堂作业及思考题，参考答案均为本人作答，不能保证完全准确。如发现错误，欢迎通过邮件联系。

目录

1 等离子体物理概述	4
1.1 等离子体的概念	4
1.1.1 等离子体的基本概念	4
1.1.2 如何研究等离子体	4
1.2 描述等离子体的基本参量	5
1.2.1 独立参量	5
1.2.2 特征参量	5
1.3 Debye 屏蔽效应	5
1.3.1 Debye 长度	6
1.3.2 Debye 势	6
1.4 等离子体鞘层及电位	7
1.4.1 鞘层的形成	7
1.4.2 鞘层厚度	7
1.4.3 鞘层电位	7
1.5 等离子体的集体振荡	8
1.5.1 等离子体电子振荡频率	8
1.5.2 振荡频率的物理意义	8
1.6 等离子体判据	8
1.7 习题及参考答案	9
2 单粒子轨道运动	11
2.1 带电粒子在均匀恒定电磁场中的运动	11
2.1.1 在均匀磁场中的运动——拉莫尔回旋	11
2.1.2 在均匀电磁场中的电漂移运动	11
2.1.3 在任意常数力场和重力场中的漂移运动	12

*Email: physchenhuang@gmail.com

2.2	带电粒子在非均匀恒定电磁场中的运动	12
2.2.1	回旋中心漂移近似	12
2.2.2	带电粒子的梯度漂移	13
2.2.3	带电粒子的曲率漂移	14
2.2.4	有限拉莫尔半径效应	15
2.2.5	回旋中心沿磁场的运动	15
2.2.6	非均匀电场引起的电漂移	16
2.3	带电粒子在随时间缓慢变化的均匀电磁场中的运动	17
2.3.1	带电粒子在缓慢变化的磁场中的运动	17
2.3.2	带电粒子在缓慢变化的电场中的极化漂移	18
2.4	绝热不变量	19
2.4.1	磁矩的不变性和磁镜效应	19
2.4.2	纵向不变量和费米加速问题	20
2.4.3	磁通不变量	20
2.5	带电粒子在高频电磁波中的运动	20
2.5.1	在弱电磁波中的颤抖运动	20
2.5.2	高频电磁场的作用与有质动力	21
2.5.3	电子加速问题	21
2.6	总结: 引导中心漂移公式汇总	21
2.7	习题及参考答案	22
3	磁流体力学	25
3.1	流体力学	25
3.1.1	流体的概念	25
3.1.2	研究方法	25
3.1.3	应力张量	26
3.1.4	基本方程	26
3.2	磁流体力学方程组	27
3.2.1	电动力学方程组	27
3.2.2	考虑电磁力的流体力学方程	28
3.2.3	状态方程	28
3.3	磁压力与磁张力	28
3.4	磁扩散与磁冻结	29
3.4.1	磁感应方程	29
3.4.2	磁扩散效应	30
3.4.3	磁冻结效应	31
3.5	均匀定常磁场中的流体漂移	33
3.5.1	抗磁性漂移 (垂直于磁场的流体漂移)	33
3.5.2	玻尔兹曼关系 (平行于磁场的流体漂移)	34
3.6	习题及参考答案	34

4 等离子体中的波	37
4.1 等离子体方程组	37
4.2 波动的概念	37
4.2.1 波的表示方法	37
4.2.2 群速度和相速度	37
4.2.3 波的偏振	38
4.2.4 色散关系	38
4.3 磁流体力学波	38
4.3.1 中性气体中的声波	38
4.3.2 阿尔芬波	39
4.3.3 磁流体力学波	40
4.3.4 阿尔芬波和磁声波的直观物理图像	43
4.4 非磁化等离子体中的波	43
4.4.1 等离子体振荡与朗缪尔波	43
4.4.2 离子等离子体波	45
4.4.3 电磁波	46
4.5 磁化等离子体中的静电波	47
4.5.1 高混杂静电振荡和高混杂波(静电电子波)	48
4.5.2 低混杂振荡和低混杂波(静电离子波)	48
4.6 磁化等离子体中的高频电磁波	49
4.6.1 垂直于磁场传播的高频电磁波	50
4.6.2 平行于磁场传播的高频电磁波	50
4.7 总结	52
4.8 习题及参考答案	52

1 等离子体物理概述

1.1 等离子体的概念

1.1.1 等离子体的基本概念

等离子体是由自由电荷组成的，宏观上呈现准中性，且具有集体效应的多粒子系统。

1. **自由**：等离子体的基本粒子是电子、离子等带电粒子以及中性粒子（原子、分子、微粒等），而非其结合体，即非束缚态。
2. **准中性**：等离子体中的正负离子数目基本相等，系统在宏观上呈现中性，但在小尺度上呈现出电磁性质。
3. **集体效应**：当体系内某处出现扰动时，理论上所有粒子行为都会受到影响，使得整个等离子体对外加扰动作出响应。集体效应反映了等离子体与中性气体的区别，是等离子体作为物质第四态的依据。

1.1.2 如何研究等离子体

1. **单粒子轨道理论**：只讨论单个带电粒子在外加电磁场中的运动，而忽略粒子间的相互作用。

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1.1)$$

2. **磁流体动力学理论**：由流体力学方程与 Maxwell 方程组描述。

- Maxwell 方程组

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_q}{\epsilon_0} \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (1.5)$$

- 连续性方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1.6)$$

- 运动方程

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{P} + \rho_q \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (1.7)$$

- 能量方程

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\epsilon + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) = \nabla \cdot (\mathbf{P} \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (1.8)$$

- 欧姆定律

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (1.9)$$

- 状态方程

$$p = p(\rho, T) \quad (1.10)$$

3. **等离子体动理学理论**：采用粒子分布函数来描述，粒子分布函数可由 Boltzmann 方程求出

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{q}{m}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \frac{f_n - f}{\tau} \quad (1.11)$$

4. **计算物理**：以一个粒子为考察对象，以统计平均的方法，考虑粒子与外界的相互作用。

1.2 描述等离子体的基本参量

1.2.1 独立参量

- 粒子数密度 n : 等离子体的粒子数密度 n 满足等离子体的准中性条件

$$n_e = n_i \quad (1.12)$$

- 温度 T : 等离子体温度 T 只有在等离子体达到热力学平衡时才有意义。粒子的平衡动能

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}k_B T \quad (1.13)$$

- 电子温度 T_e 和离子温度 T_i : 粒子间通过碰撞交换能量, 最后达到平衡。由于电子和离子的质量相差悬殊, 同种粒子之间达到平衡比异种粒子之间达到平衡快得多, 这时有电子温度 T_e 和离子温度 T_i , 它们通常是不相等的。当等离子体整体达到平衡状态时, 才有统一的等离子体温度 T 。

- 垂直温度 T_{\perp} 和平行温度 T_{\parallel} : 等离子体在磁场中呈现各向异性。

$$E_{\perp k} = \frac{1}{2}mv_{\perp}^2 = kT_{\perp} \quad (1.14)$$

$$E_{\parallel k} = \frac{1}{2}mv_{\parallel}^2 = \frac{1}{2}kT_{\parallel} \quad (1.15)$$

1.2.2 特征参量

- 粒子平均间距 d

$$d = n^{-1/3} \quad (1.16)$$

- 朗道长度 λ_L : 等离子体中两个粒子能接近的最小距离。

$$\lambda_L = \frac{Z_{\alpha}Z_{\beta}e^2}{4\pi\epsilon_0 k_B T} \quad (1.17)$$

- 经典条件: 能用经典理论描述等离子体需要满足的条件, 即粒子的德布罗意波长 λ 远小于粒子的平均间距 d :

$$\lambda \sim \frac{h}{\sqrt{mkT}} \ll d \Rightarrow n^{1/3}T^{-1/2} \ll 1 \quad (1.18)$$

- 稀薄条件: 能将等离子体当作理想气体处理的条件, 即等离子体热运动的特征动能远大于粒子间的平均库仑相互作用势能:

$$\frac{Z_{\alpha}Z_{\beta}e^2}{4\pi\epsilon_0 d} \ll k_B T \Rightarrow n\lambda_L^3 \ll 1 \quad (1.19)$$

1.3 Debye 屏蔽效应

每个带电粒子附近都存在电场, 该电场被周围粒子形成的电荷云完全“屏蔽”时, 在一定空间区域外呈现电中性。这种屏蔽称为 Debye 屏蔽, 屏蔽粒子场所占的空间尺度称为 Debye 长度 λ_D 。

- Debye 屏蔽是等离子体的**本征行为**;
- Debye 屏蔽是等离子体的**集体行为**的表现;
- Debye 屏蔽是等离子体对于扰动的**空间响应**。

1.3.1 Debye 长度

考虑一个带电粒子周围的静电势 $\varphi(r)$ ，满足 Poisson 方程

$$\nabla^2 \varphi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} \quad (1.20)$$

假设电子和离子均服从 Boltzmann 分布，粒子数密度为

$$n_e = n_{e0} \exp\left(\frac{e\varphi}{k_B T_e}\right) \quad n_i = n_{i0} \exp\left(-\frac{e\varphi}{k_B T_i}\right) \quad (1.21)$$

其中 n_{e0} 和 n_{i0} 分别是 $\varphi = 0$ 处电子和离子的数密度，在此等离子体是电中性的，即 $n_{e0} = n_{i0} = n_0$ 。在距该带电粒子足够远的位置 $e\varphi \ll k_B T_{e,i}$ ，将电子数密度与离子数密度按级数展开，保留一次项，得到

$$n_e = n_0 \left(1 + \frac{e\varphi}{k_B T_e}\right) \quad n_i = n_0 \left(1 - \frac{e\varphi}{k_B T_i}\right) \quad (1.22)$$

电荷密度

$$\rho = e(n_i - n_e) = -\frac{n_0 e^2 \varphi}{k_B T_e} - \frac{n_0 e^2 \varphi}{k_B T_i} \quad (1.23)$$

代入 Poisson 方程

$$\nabla^2 \varphi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} = \left(\frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 k_B T_e} + \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 k_B T_i}\right) \varphi(\mathbf{r}) = \frac{\varphi(\mathbf{r})}{\lambda_D^2} \quad (1.24)$$

得到 Debye 长度

$$\lambda_D = \left(\frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 k_B T_e} + \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 k_B T_i}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (1.25)$$

接下来考虑电子或离子的 Debye 长度。假设离子不动，构成均匀的正电背景，可以求出**电子的 Debye 长度**为

$$\lambda_{De} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k_B T_e}{n_0 e^2}} = 69 \left(\frac{T_e[\text{K}]}{n_e[\text{m}^{-3}]}\right)^{\frac{1}{2}} [\text{m}] = 7430 \left(\frac{T_e[\text{eV}]}{n_e[\text{m}^{-3}]}\right)^{\frac{1}{2}} [\text{m}] \quad (1.26)$$

同样，假设电子构成密度均匀的负电背景，得到离子的 Debye 长度

$$\lambda_{Di} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k_B T_i}{n_0 e^2}} \quad (1.27)$$

Debye 长度的**物理意义**是：

- Debye 长度是静电作用的屏蔽半径。
- Debye 长度是等离子体中电荷局部偏离电中性的空间尺度，在球内各点 $n_e(r) \neq n_i(r)$ 。
- Debye 长度是等离子体中电中性条件成立的最小空间： $L \gg \lambda_D$ 。

1.3.2 Debye 势

设 $\varphi(r) = u(r)/r$ ，上述方程变为

$$\frac{d^2 u(r)}{dr^2} - \frac{u(r)}{\lambda_D^2} = 0 \quad (1.28)$$

通解为

$$u(r) = A \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right) + B \exp\left(\frac{r}{\lambda_D}\right) \quad (1.29)$$

故

$$\varphi(r) = \frac{A}{r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right) + \frac{B}{r} \exp\left(\frac{r}{\lambda_D}\right) \quad (1.30)$$

引入边界条件, 当 $r \rightarrow \infty$ 时, $\varphi \rightarrow 0$; 当 $r \rightarrow 0$ 时, $\varphi \rightarrow q/4\pi\epsilon_0 r$, 则

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right) \quad (1.31)$$

此势称为 Yukawa 势, 在 $r = \lambda_D$ 的球面上, Debye 势数值是对应的库仑势的 $1/e$, 在此球面外, 势场十分微弱, 可以视为不存在。由上述分析可知, 一个带电粒子会将一些异号电荷吸引到其附近, 形成屏蔽云, 反过来对自身的势起屏蔽作用, 这就是所谓的 Debye 屏蔽现象。Debye 球内粒子之间的相互作用是库仑相互作用, Debye 球外粒子之间的相互作用是屏蔽势作用。

1.4 等离子体鞘层及电位

1.4.1 鞘层的形成

将固体放入等离子体中, 会发现固体与等离子体接触处会有一个明显偏离电中性的暗区, 这一薄层称为等离子体鞘层。假设电子与离子的平均能量相等

$$\frac{1}{2}m_e v_e^2 = \frac{1}{2}m_i v_i^2 \Rightarrow \frac{v_e}{v_i} = \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \gg 1 \quad (1.32)$$

这样流向固体器壁的电子流大大超过离子流, 从而使固体壁负电荷过剩, 这样就得到一个负电位, 这个负电位反过来又会阻碍电子流的扩散, 使离子流加速, 最终会使电子和离子的扩散速度相同, 这时电子流和离子流达到平衡, 使固体壁上负电位数不再改变, 在固体壁到电中性的等离子体之间, 形成一个电位逐渐过渡到零的“边界电位过渡层”, 这就是鞘层。故悬浮在等离子体中的物体 $\varphi < 0$ 。

1.4.2 鞘层厚度

设鞘层中电子和离子在位场 $\varphi(y)$ 作用下按 Boltzmann 分布

$$n_e(y) = n_0 \exp\left(\frac{e\varphi}{k_B T_e}\right) = n_0 \left(1 + \frac{e\varphi}{k_B T_e}\right) \quad (1.33)$$

$$n_i(y) = n_0 \exp\left(-\frac{e\varphi}{k_B T_e}\right) = n_0 \left(1 - \frac{e\varphi}{k_B T_e}\right) \quad (1.34)$$

代入 Poisson 方程解出

$$r_s = \left(\frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 k_B T_e} + \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 k_B T_i}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (1.35)$$

1.4.3 鞘层电位

$$\varphi(y) = \varphi_0 e^{-y/r_s} \quad (1.36)$$

其中 φ_0 是与等离子体接触的固体表面势。

- 对于悬浮于等离子体中的固体

$$\varphi_0 = -\frac{k_B T_e}{e} \ln\left(\frac{m_i T_e}{m_e T_i}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.37)$$

- 对于接有电源的电极, φ_0 可正可负。无论 φ_0 是正是负, 均有鞘层存在。

1.5 等离子体的集体振荡

等离子体在热平衡时是准电中性的。若等离子体内部受到某种扰动使其中一些区域内电荷密度不为零，就会产生强的静电恢复力，使得等离子体内的电荷分布发生振荡，即**等离子体振荡**。

1.5.1 等离子体电子振荡频率

考虑厚度为 L 的片状等离子体，粒子数密度为 n ，假设其中的电子相对于离子运动了很小的距离 x ，于是

$$m_e \ddot{x} = -eE_x = -\frac{n_e e^2}{\varepsilon_0} x \quad (1.38)$$

即

$$\ddot{x} + \frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m_e} x = 0 \quad (1.39)$$

故等离子体电子振荡频率

$$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m_e}} \text{ [rad/s]} \approx 9000 \sqrt{n_e [\text{cm}^{-3}]} \text{ [rad/s]} \quad (1.40)$$

$$f_{pe} = \frac{\omega_{pe}}{2\pi} \text{ Hz} \quad (1.41)$$

类似地，假设离子在电子均匀分布的背景上振荡，得到离子振荡频率

$$\omega_{pi} = \sqrt{\frac{n_i Z_i^2 e^2}{\varepsilon_0 m_i}} \quad (1.42)$$

在一般情况下，若同时考虑电子和离子在电场作用下的运动，则可以求得振荡频率

$$\omega_p = \sqrt{\omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2} \approx \omega_{pe} \quad (1.43)$$

1.5.2 振荡频率的物理意义

我们把电子以平均特征速度走过 Debye 长度所需的时间定义为**响应时间**

$$t_D = \frac{\lambda_D}{v_{th}} = \frac{1}{\omega_{pe}} \quad (1.44)$$

因此，振荡频率的倒数，即为等离子体对扰动的响应时间，即如果等离子体中某处发生扰动，则等离子体将在 ω_{pe}^{-1} 的时间尺度内作出响应。

1.6 等离子体判据

1. $\lambda_D \gg n^{-1/3}$

即等离子体的 Debye 长度远大于粒子间的平均距离。Debye 屏蔽效应是大量粒子的统计效应，统计条件要求德拜球内有大量的粒子，为此必须满足此条件。

2. $\lambda_D \ll L$

即 Debye 长度远小于等离子体特征长度。由于在 Debye 球内不能保证此电中性，若不满足这个条件，就不可能把等离子体看作电中性的物质聚集态。

3. $\omega_p > \nu_c$

ν_c 是碰撞频率，是热运动阻碍恢复电中性的因素，当 $\omega_p > \nu_c$ 时，电子来不及通过碰撞耗散振荡能量，则振荡能维持，保证了等离子体维持电中性。

1.7 习题及参考答案

1. 我们的宇宙主要是以什么形式存在?

宇宙中 99.99% 的可见物质以等离子体形式存在。

2. 什么是等离子体? 如何理解自由、准中性和集体效应?

等离子体是由自由电荷组成的, 宏观上呈现准中性, 且具有集体效应的多粒子系统。

(a) **自由**: 等离子体的基本粒子是电子、离子等带电粒子以及中性粒子 (原子、分子、微粒等), 而非其结合体, 即非束缚态。

(b) **准中性**: 等离子体中的正负离子数目基本相等, 系统在宏观上呈现中性, 但在小尺度上呈现出电磁性质。

(c) **集体效应**: 当体系内某处出现扰动时, 理论上所有粒子行为都会受到影响, 使得整个等离子体对外加扰动作出响应。集体效应反映了等离子体与中性气体的区别, 是等离子体作为物质第四态的依据。

3. 试就高温、低温、高密度、低密度等离子体各举一例。

磁约束受控热核聚变等离子体是高温等离子体, 电弧等离子体是低温等离子体, 太阳内部等离子体是高密度等离子体, 电离层等离子体是低密度等离子体。

4. 由于德拜屏蔽, 带电粒子的库仑势被限制在德拜长度内, 这是否意味着粒子与德拜球外粒子无相互作用? 为什么?

有, 但是表现为集体相互作用, 实际上屏蔽本身可以视为相互作用的传递过程, 粒子对德拜球外的粒子的相互作用, 通过周围屏蔽粒子的传递而作用。

5. 作为物质第四种存在形式, 对等离子体体系的时空尺度有何要求?

空间尺度必须远大于德拜长度, 时间尺度必须远大于等离子体特征响应时间。

6. 为什么我们周围自然存在的等离子体很少见?

气体处于热力学平衡时, 电离度 α 有沙哈方程决定

$$\alpha \approx \frac{n_i}{n_n} = 2.4 \times 10^{21} \frac{T^{3/2}}{n_n} e^{-U_i/k_B T} \quad (1.45)$$

在常温条件下 (300K), 粒子相互碰撞不剧烈, 气体的电离度很低 (以 N_2 为例, $\alpha = 10^{-122}$), 而电离度需要在 10^{-4} 以上才会表现出集体行为。在常温下气体不具备等离子体的性质, 因此自然存在的等离子体很少见。

7. 电离气体一定是等离子体吗? 反过来呢?

不一定, 电离气体需要有足够的电离度 ($\alpha > 10^{-4}$) 才拥有等离子体性质 (集体行为); 反过来也不一定, 电离气体只是等离子体的一种存在形式。

8. 等离子体判据是什么?

等离子体判据:

$$L \gg \lambda_D \quad g = (n\lambda_D^3)^{-1} \ll 1 \quad \tau \gg t_D$$

其中 L 为系统在空间上的特征尺度, τ 为带电粒子与电中性粒子的平均碰撞时间, 只要其中一个条件不满足, 该系统就不是等离子体, 只是一些带电粒子的简单集合。

9. 为什么等离子体技术在现代工业和前沿科技领域有非常广泛的应用?

等离子体中含有大量易受外加电场和磁场操控的自由电荷。

10. 什么是 Debye 屏蔽? 写出 Debye 长度表达式, 说明其物理意义。

每个带电粒子附近都存在电场, 该电场被周围粒子形成的电荷云完全“屏蔽”时, 在一定空间区域外呈现电中性。这种屏蔽称为 Debye 屏蔽, 屏蔽粒子场所占的空间尺度称为 Debye 长度 λ_D

$$\lambda_D = \left(\frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 k_B T_e} + \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 k_B T_i} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

- Debye 长度是静电作用的屏蔽半径。
- Debye 长度是等离子体中电荷局部偏离电中性的空间尺度, 在球内各点 $n_e(r) \neq n_i(r)$ 。
- Debye 长度是等离子体中电中性条件成立的最小空间: $L \gg \lambda_D$ 。

11. Debye 屏蔽效应一定要有异性离子存在吗?

不一定, 完全由电子构成的非中性等离子体也具有 Debye 屏蔽效应。

12. 什么是等离子体振荡? 写出电子振荡频率表达式, 并说明其物理意义。

等离子体在热平衡时是准电中性的。若等离子体内部受到某种扰动使其中一些区域内电荷密度不为零, 就会产生强的静电恢复力, 使得等离子体内的电荷分布发生振荡, 即等离子体振荡。电子振荡频率为

$$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m_e}}$$

- 等离子体振荡频率反映等离子体对内部扰动作出反应的速度;
- 等离子体振荡频率的倒数为等离子体对外加扰动的特征响应时间

$$t_D = \frac{\lambda_D}{v_{th}} = \frac{1}{\omega_{pe}}$$

13. 试计算下列参数条件下等离子体的 Debye 长度 λ_D 和等离子体振荡频率 ω_p

$$\lambda_D \approx \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k_B T_e}{n e^2}} = 69 \left(\frac{T_e [\text{K}]}{n [\text{m}^{-3}]} \right)^{\frac{1}{2}} [\text{m}] = 7430 \left(\frac{T_e [\text{eV}]}{n [\text{m}^{-3}]} \right)^{\frac{1}{2}} [\text{m}]$$

$$\omega_p \approx \sqrt{\frac{n e^2}{\varepsilon_0 m_e}} [\text{rad/s}] \approx 9000 \sqrt{n [\text{cm}^{-3}]} [\text{rad/s}]$$

- (1) 磁流体发电机: $T_e = 2500\text{K}$, $n = 10^{20}\text{m}^{-3}$
- (2) 低压辉光放电: $k_B T_e = 2\text{eV}$, $n = 10^{10}\text{cm}^{-3}$
- (3) 地球的电离层: $k_B T_e = 0.1\text{eV}$, $n = 10^6\text{cm}^{-3}$

14. 用电子德拜长度表示等离子体的德拜长度的前提是什么?

所考虑问题的时间尺度小于离子的响应时间, 离子不能响应。

2 单粒子轨道运动

单粒子轨道法是将等离子体看成是由大量独立的带电粒子组成的集体，只讨论单个粒子在外加电磁场中的运动，而忽略粒子间的相互作用，因此单粒子轨道法适用于稀薄等离子体。利用单粒子轨道运动来描述等离子体行为的前提是假设电场和磁场是预先确定的，不受带电粒子运动的影响。

2.1 带电粒子在均匀恒定电磁场中的运动

2.1.1 在均匀磁场中的运动——拉莫尔回旋

假设粒子在均匀磁场 $\mathbf{B} = B\hat{e}_z$ 中运动，电场 $\mathbf{E} = 0$ ，粒子运动方程

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (2.1)$$

分量为

$$\frac{dv_x}{dt} = \omega_c v_y \quad \frac{dv_y}{dt} = -\omega_c v_x \quad \frac{dv_z}{dt} = 0 \quad (2.2)$$

选定初始条件，解得

$$v_x = v_{\perp} \cos \omega_c t \quad v_y = -v_{\perp} \sin \omega_c t \quad v_z = v_{\parallel} \quad (2.3)$$

再次积分得到粒子轨道

$$x - x_0 = r_L \sin \omega_c t \quad y - y_0 = r_L \cos \omega_c t \quad z - z_0 = v_{\parallel} t \quad (2.4)$$

其中回旋频率

$$\omega_c = \frac{|q|B}{m} \quad (2.5)$$

拉莫尔半径 (Larmor radius)

$$r_L = \frac{v_{\perp}}{\omega_c} = \frac{mv_{\perp}}{|q|B} \quad (2.6)$$

其大小与粒子质量成正比，因此离子的轨道半径远大于电子。 (x_0, y_0) 称为回旋中心或导向中心。

综上所述，带电粒子在均匀恒定磁场中，沿磁场方向做匀速直线运动，垂直磁场方向做匀速圆周运动，因此粒子的运动轨迹是一绕磁感线的螺旋线。

2.1.2 在均匀电磁场中的电漂移运动

假设粒子在 $\mathbf{E} = E\hat{e}_x$ ， $\mathbf{B} = B\hat{e}_z$ 的均匀电磁场中运动，运动方程

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (2.7)$$

分量为

$$\frac{dv_x}{dt} = \omega_c v_y + \frac{\omega_c E_x}{B} \quad \frac{dv_y}{dt} = -\omega_c v_x \quad (2.8)$$

求导得

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} = \omega_c \frac{dv_y}{dt} = -\omega_c^2 v_x \quad \frac{d^2 v_y}{dt^2} = -\omega_c \frac{dv_x}{dt} = -\omega_c^2 \left(v_y + \frac{E_x}{B} \right) \quad (2.9)$$

解出

$$v_x = v_{\perp} \cos \omega_c t \quad v_y = -v_{\perp} \sin \omega_c t - \frac{E_x}{B} \quad (2.10)$$

再次积分得到粒子轨道

$$x - x_0 = r_L \sin \omega_c t \quad y - y_0 = r_L \cos \omega_c t - \frac{E_x}{B} t \quad (2.11)$$

粒子运动轨迹不封闭导致漂移。

将速度分解为 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_c + \mathbf{v}_E$ ，其中回旋速度 v_c 满足

$$m \frac{d\mathbf{v}_c}{dt} = q\mathbf{v}_c \times \mathbf{B} \quad (2.12)$$

漂移速度 \mathbf{v}_E 满足

$$\frac{q}{m}(\mathbf{E} + \mathbf{v}_E \times \mathbf{B}) = 0 \quad (2.13)$$

将上式叉乘 \mathbf{B} 并利用矢量恒等式 $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$ 可得

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B} - B^2 \mathbf{v}_E + \mathbf{B}(\mathbf{v}_E \cdot \mathbf{B}) = 0 \quad (2.14)$$

漂移速度与磁场垂直， $\mathbf{v}_E \cdot \mathbf{B} = 0$ ，于是

$$\mathbf{v}_E = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (2.15)$$

我们可以得到漂移速度的一些性质：

1. $v_E = E_{\perp}/B$ 为常数，与粒子性质 (q, m, v 等) 无关。
2. 电子和离子的漂移速度 (大小和方向) 是一样的，因此不会在等离子体中产生电荷分离和电流。
3. \mathbf{v}_E 与电场和磁场均垂直。

2.1.3 在任意常数力场和重力场中的漂移运动

假设粒子处在均匀磁场中并在一恒定的力 \mathbf{F} 作用下运动，则回旋中心的漂移速度满足

$$\mathbf{F} + q\mathbf{v}_F \times \mathbf{B} = 0 \quad (2.16)$$

于是

$$\mathbf{v}_F = \frac{1}{q} \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (2.17)$$

对于重力场 $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$ ，则重力漂移速度为

$$\mathbf{v}_g = \frac{m}{q} \frac{\mathbf{g} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (2.18)$$

由此可见，重力漂移速度与电荷符号有关——电子和离子的漂移方向相反，因此会产生漂移电流

$$\mathbf{J} = \sum_{\alpha=i,e} n_{\alpha} q_{\alpha} \mathbf{v}_{g\alpha} = n(m_i + m_e) \frac{\mathbf{g} \times \mathbf{B}}{B^2} = \frac{\rho \mathbf{g} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (2.19)$$

其中 n 为等离子体数密度， ρ 为流体元的质量密度。

2.2 带电粒子在非均匀恒定电磁场中的运动

2.2.1 回旋中心漂移近似

将带电粒子在电磁场中的运动分解为回旋运动和回旋中心漂移运动的叠加，即 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_c + \mathbf{v}_D$ 。在非均匀性较弱时，即满足

- 表述一

1. 回旋运动的回旋半径远小于磁场的非均匀性标长 $r_c \ll L$;

2. 在一个回旋周期内回旋中心的漂移距离远小于回旋半径 $v_D/\omega_c \ll r_c$

• 表述二：磁场的时空弱不均匀性条件

1. 空间条件（粒子回旋运动轨道内，磁场的相对变化值为小量）

$$|(\mathbf{r}_c \cdot \nabla)\mathbf{B}|_{\mathbf{r}_c=0} \ll |\mathbf{B}|_{\mathbf{r}_c=0} \quad (2.20)$$

2. 时间条件（粒子回旋运动周期内，磁场的相对变化值为小量）

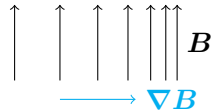
$$\left| \frac{1}{\omega_c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right|_{\mathbf{r}_c=0} \ll |\mathbf{B}|_{\mathbf{r}_c=0} \quad (2.21)$$

可将回旋运动看作快运动，将漂移运动看作慢运动。

- 处理快的回旋运动时，通常假定在局域磁场中运动，即把局域磁场看成常数，忽略回旋中心的漂移。
- 处理慢的漂移运动时，则对快运动进行平均，即在一个回旋周期内对运动进行平均。由于场的不均匀性导致回旋轨道不闭合，造成回旋中心的漂移。（注意：必须在场的**弱不均匀性**条件下，即**缓变条件**。）

2.2.2 带电粒子的梯度漂移

假设没有电场，且磁场的方向是均匀的，但磁场的大小不均匀，且磁感应强度的梯度与磁场方向垂直 $\nabla B \perp \mathbf{B}$ ，即磁感线是直的。



对于非均匀磁场，我们可以将磁感应强度在回旋中心处展开

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + (\mathbf{r}_c \cdot \nabla)\mathbf{B}_0 + \dots \quad (2.22)$$

忽略高阶项，在 Lorentz 力作用下的运动方程为

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0 + q\mathbf{v} \times (\mathbf{r}_c \cdot \nabla)\mathbf{B}_0 \quad (2.23)$$

其中 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_c + \mathbf{v}_{\nabla B}$ 。将缓变场看作微扰，回旋速度 \mathbf{v}_c 满足未扰动轨道运动方程

$$m \frac{d\mathbf{v}_c}{dt} = q\mathbf{v}_c \times \mathbf{B}_0 \quad (2.24)$$

于是

$$m \frac{d\mathbf{v}_{\nabla B}}{dt} = q\mathbf{v}_{\nabla B} \times \mathbf{B}_0 + q\mathbf{v}_c \times (\mathbf{r}_c \cdot \nabla)\mathbf{B}_0 + q\mathbf{v}_{\nabla B} \times (\mathbf{r}_c \cdot \nabla)\mathbf{B}_0 \quad (2.25)$$

由于漂移速度是小量，上式可简化为

$$q\mathbf{v}_{\nabla B} \times \mathbf{B}_0 + q\mathbf{v}_c \times (\mathbf{r}_c \cdot \nabla)\mathbf{B}_0 = 0 \quad (2.26)$$

得到

$$\mathbf{v}_{\nabla B} = \frac{\mathbf{v}_c \times (\mathbf{r}_c \cdot \nabla)\mathbf{B}_0 \times \mathbf{B}_0}{B^2} \quad (2.27)$$

类比一般漂移公式，可知非均匀磁场所产生的等效力为

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v}_c \times (\mathbf{r}_c \cdot \nabla)\mathbf{B}_0 = q \left(-\frac{q}{m}\mathbf{B}_0 \times \mathbf{r}_c \right) \times (\mathbf{r}_c \cdot \nabla)\mathbf{B}_0 = \frac{q^2}{m}(\mathbf{r}_c \cdot \nabla)\mathbf{B}_0 \times (\mathbf{B}_0 \times \mathbf{r}_c) \quad (2.28)$$

漂移运动是对运动方程 (2.23) 在一个周期内做平均，利用 $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$ ，得到

$$\langle \mathbf{F} \rangle = q\langle \mathbf{v}_c \times (\mathbf{r}_c \cdot \nabla)\mathbf{B}_0 \rangle = \frac{q^2}{m} \langle [\mathbf{r}_c \cdot (\mathbf{r}_c \cdot \nabla)\mathbf{B}_0] \mathbf{B}_0 - [\mathbf{B}_0 \cdot (\mathbf{r}_c \cdot \nabla)\mathbf{B}_0] \mathbf{r}_c \rangle \quad (2.29)$$

故

$$\langle \mathbf{F}_{\parallel} \rangle = \frac{q^2}{m} \langle [\mathbf{r}_c \cdot (\mathbf{r}_c \cdot \nabla)\mathbf{B}_0] \mathbf{B}_0 \rangle \quad (2.30)$$

$$\langle \mathbf{F}_{\perp} \rangle = -\frac{q^2}{m} \langle [\mathbf{B}_0 \cdot (\mathbf{r}_c \cdot \nabla)\mathbf{B}_0] \mathbf{r}_c \rangle \quad (2.31)$$

取局域直角坐标系，有

$$\mathbf{r}_c = r_c (\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{y}) \quad \mathbf{B}_0 = B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z} \quad (2.32)$$

代入原方程，整理得

$$\langle \mathbf{F}_{\parallel} \rangle = -\mu(\nabla \mathbf{B})_{\parallel} \quad \langle \mathbf{F}_{\perp} \rangle = -\mu(\nabla \mathbf{B})_{\perp} \quad (2.33)$$

其中磁矩

$$\mu = \frac{mv_{\perp}^2}{2B} \quad (2.34)$$

梯度漂移速度

$$\mathbf{v}_{\nabla B} = \frac{1}{q} \frac{\langle \mathbf{F} \rangle \times \mathbf{B}}{B^2} = \frac{\mu}{q} \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^2} = \frac{mv_{\perp}^2}{2qB} \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^2} = \frac{1}{2} v_{\perp} r_c \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^2} \quad (2.35)$$

2.2.3 带电粒子的曲率漂移

假设磁感应强度大小为常数 B ，但磁场方向不均匀。设磁感线的曲率半径为 R_C ，则粒子以 \mathbf{v}_{\parallel} 的切向速度运动时会受到离心力

$$\mathbf{F}_C = mv_{\parallel}^2 \frac{\mathbf{R}_C}{R_C^2} \quad (2.36)$$

代入漂移公式，得到由离心力引起的曲率漂移速度

$$\mathbf{v}_C = \frac{mv_{\parallel}^2}{qB^2} \frac{\mathbf{R}_C \times \mathbf{B}}{R_C^2} \quad (2.37)$$

以下证明：弯曲磁场在半径方向一定是不均匀的，即存在梯度。假设等离子体是稀薄的，且不考虑电场，由安培定律可知

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad (2.38)$$

安培定律在柱坐标中可表示为

$$\nabla \times \mathbf{B} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \theta} - \frac{\partial B_{\theta}}{\partial z} \right) \hat{e}_r + \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) \hat{e}_{\theta} + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(rB_{\theta})}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right] \hat{e}_z = \frac{1}{r} \frac{\partial(rB_{\theta})}{\partial r} \hat{e}_z = 0 \quad (2.39)$$

故

$$rB_{\theta} = \text{const} \quad \Rightarrow \quad B_{\theta} \propto \frac{1}{r} \quad (2.40)$$

因此弯曲磁场在半径方向一定是不均匀的，总漂移速度必须考虑曲率漂移和梯度漂移。

由于

$$\frac{\nabla|B|}{|B|} = -\frac{\mathbf{R}_C}{R_C^2} \quad (2.41)$$

总漂移速度为

$$\mathbf{v}_{\nabla B} + \mathbf{v}_C = \frac{\mathbf{R}_C \times \mathbf{B}}{qR^2B^2} \left(mv_{\parallel}^2 + \frac{1}{2}mv_{\perp}^2 \right) = \frac{\mathbf{R}_C \times \mathbf{B}}{qR^2B^2} \left(2 \cdot \frac{1}{2}k_B T + k_B T \right) = \frac{2k_B T}{q} \frac{\mathbf{R}_C \times \mathbf{B}}{R^2B^2} \quad (2.42)$$

总漂移速度与粒子电荷有关，正负电荷漂移方向相反，产生电场，等离子体整体漂移。

2.2.4 有限拉莫尔半径效应

由缓变磁场中的梯度漂移公式我们可以看到

$$\mathbf{v}_{\nabla B} = \frac{1}{2} \mathbf{v}_{\perp} r_c \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^2} \quad (2.43)$$

当 $B \rightarrow \infty$ 或 $r_c \rightarrow 0$ 时，粒子无法感知磁场在空间的非均匀性，因此漂移速度趋于零 $\mathbf{v}_{\nabla B} \rightarrow 0$ ，带电粒子被强磁场所约束，即**磁冻结**。

而实际上磁场强度不可能趋于无穷，磁场强度的有限性而产生有限的拉莫尔半径，因此粒子在做拉莫尔回旋运动时在轨道的不同位置会感受到磁场强度的不同，在不同位置的回旋半径也会有所修正，这种情况下产生的漂移称为**有限拉莫尔半径效应**。

2.2.5 回旋中心沿磁场的运动

以上几节讨论的漂移运动都是垂直磁场的运动，本小节讨论平行磁场的漂移运动。假设磁场是柱对称的， $B_{\theta} = 0$ ， $\mathbf{B} = B_r \hat{r} + B_z \hat{z}$ ，这样的场也称为**磁镜** (阱) 场。磁场散度为零，在柱坐标下

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (2.44)$$

假设 $\partial B_z / \partial z$ 在 $r = 0$ 的轴上给定，且随 r 变化不大，则在轴线附近近似有

$$B_r = -\frac{1}{2} r \left(\frac{\partial B_z}{\partial z} \right)_{r=0} \quad (2.45)$$

粒子所受 Lorentz 力分量为

$$F_r = q(v_{\theta} B_z) \quad F_{\theta} = q(-v_r B_z + v_z B_r) \quad F_z = -qv_{\theta} B_r \quad (2.46)$$

其中 F_r 和 F_{θ} 的第一项构成回旋运动，是未扰动轨道； F_{θ} 的第二项是造成粒子沿 r 方向的漂移，是垂直磁场方向的运动； F_z 造成粒子沿磁感线方向运动，将 B_r 表达式代入，即

$$F_z = \frac{1}{2} q v_{\theta} r \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (2.47)$$

在一个回旋周期内平均，考虑到在轴线上的情况 $v_{\theta} = v_{\perp}$ 和 $r = r_c$ ，得到

$$\langle F_z \rangle = -\frac{1}{2} q v_{\perp} r_c \frac{\partial B_z}{\partial z} = -\mu \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (2.48)$$

推广到一般情况，沿磁感线方向的平均力

$$\mathbf{F}_{\parallel} = -\mu \nabla_{\parallel} B \quad (2.49)$$

由于这个力的存在，等离子体会被约束在磁镜中，且与粒子电荷无关。

可以证明，对于回旋中心的缓慢漂移运动，磁矩是个不变量。根据牛顿第二定律

$$m \frac{dv_{\parallel}}{dt} = -\mu \nabla_{\parallel} B = -\mu \frac{\partial B}{\partial s} \quad (2.50)$$

两边同时乘以 $v_{\parallel} = ds/dt$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 \right) = -\mu \frac{dB}{dt} \quad (2.51)$$

由于磁场力不做功，粒子动能守恒

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} m v_{\perp}^2 \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 + \mu B \right) = -\mu \frac{dB}{dt} + \frac{d}{dt} (\mu B) = B \frac{d\mu}{dt} = 0 \quad (2.52)$$

故

$$\frac{d\mu}{dt} = 0 \quad (2.53)$$

由于

$$\mu = \frac{m v_{\perp}^2}{2B} = \frac{q}{2} v_{\perp} r_c = \frac{q}{2} r_c^2 \omega_c = \frac{q}{2} r_c^2 \frac{qB}{m} = \frac{q^2}{2\pi m} \pi r_c^2 B = \frac{q^2}{2\pi m} \Phi \quad (2.54)$$

即粒子回旋运动轨道所包含的磁通也是守恒的。

2.2.6 非均匀电场引起的电漂移

假定磁场是均匀的， $\mathbf{B} = B \hat{e}_z$ ，在此之上叠加上一非均匀的电场，并假定电场为如下形式

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(kx) = E_0 \cos(kx) \hat{e}_x \quad (2.55)$$

粒子的运动方程为

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q[\mathbf{E}(x) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}] \quad (2.56)$$

假定电场较弱，使 $\mathbf{E}_0/B \ll |v_c|$ ，则可以用未扰动轨道近似，即用未扰动的拉莫尔轨道

$$x = x_0 + r_c \sin(\omega_c t) \quad (2.57)$$

代入电场表达式

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos[kx_0 + kr_c \sin(\omega_c t)] = \mathbf{E}_0 [\cos(kx_0) \cos(kr_c \sin \omega_c t) - \sin(kx_0) \sin(kr_c \sin \omega_c t)] \quad (2.58)$$

假设 $|kr_c| \ll 1$ ，即 $|r_c| \ll \lambda$ ，则有

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \left[\cos(kx_0) \left(1 - \frac{1}{2} k^2 r_c^2 \sin^2(\omega_c t) \right) - \sin(kx_0) kr_c \sin(\omega_c t) \right] \quad (2.59)$$

于是

$$\langle \mathbf{E} \rangle = \mathbf{E}(x_0) \left(1 - \frac{1}{4} k^2 r_c^2 \right) \quad (2.60)$$

代入电漂移公式得到漂移速度

$$\mathbf{v}_{DE} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \left(1 - \frac{1}{4} k^2 r_c^2 \right) \quad (2.61)$$

这是电场随 x 简谐变化时的电漂移速度，对于一般情况的若不均匀性，则用算符 ∇ 代替 $i\mathbf{k}$ 可得到一般情况的电漂移速度

$$\mathbf{v}_E = \left(1 + \frac{1}{4} r_c^2 \nabla^2 \right) \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (2.62)$$

第二项是对非均匀电场漂移速度的修正，也称为**有限拉莫尔半径效应**。拉莫尔半径的大小与粒子的性质有关，因此离子与电子漂移速度不同，会造成电荷分离，且存在漂移电流。如果电荷分离产生的电场使原来的扰动电场增强，则会造成等离子体不稳定性，称为**漂移不稳定性**。

2.3 带电粒子在随时间缓慢变化的均匀电磁场中的运动

2.3.1 带电粒子在缓慢变化的磁场中的运动

假定磁场是空间均匀的，但随时间缓慢变化。尽管磁场不能直接改变粒子的能量，但能通过电磁感应产生电场，通过电场改变粒子的能量

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.63)$$

由于磁场变化缓慢，则有

$$\mathbf{E} = -\frac{r}{2} \frac{\partial B}{\partial t} \hat{e}_\theta \quad (2.64)$$

代入电漂移公式，有

$$\mathbf{v}_t = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} = -\frac{\mathbf{r}}{2B} \frac{\partial B}{\partial t} \quad (2.65)$$

漂移速度与粒子性质无关。

以下证明：带电粒子在随时间缓慢变化的磁场中运动时，它的磁矩 μ 是一个不变量。粒子在垂直于磁场方向上的运动方程

$$m \frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}_\perp \times \mathbf{B}) \quad (2.66)$$

垂直磁场方向上动能的变化为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_\perp^2 \right) = m \mathbf{v}_\perp \cdot \frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt} = q \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_\perp = q \mathbf{E} \cdot \frac{d\mathbf{l}}{dt} \quad (2.67)$$

对一个周期积分

$$\delta \left(\frac{1}{2} m v_\perp^2 \right) = \int_0^{2\pi/\omega_c} q \mathbf{E} \cdot \frac{d\mathbf{l}}{dt} dt = \int_{l_0}^{l_1} q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.68)$$

由于 \mathbf{B} 缓慢变化，将轨道近似为闭合的积分路径

$$\begin{aligned} \delta \left(\frac{1}{2} m v_\perp^2 \right) &= \oint q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = q \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = -q \int_S \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \\ &= -q \frac{\delta B}{T_c} \pi r_c^2 = -q \frac{\omega_c \delta B}{2\pi} \pi r_c^2 = \frac{1}{2} q \omega_c r_c^2 \delta B = \frac{m v_\perp^2}{2B} \delta B = \mu \delta B \end{aligned} \quad (2.69)$$

其中 δB 是在一个回旋周期内磁感应强度的变化量。另一方面，由磁矩 μ 的定义

$$\mu = \frac{m v_\perp^2}{2B} \quad (2.70)$$

有

$$\delta(\mu B) = \delta \left(\frac{1}{2} m v_\perp^2 \right) = \mu \delta B \quad (2.71)$$

由此

$$\delta \mu = 0 \quad (2.72)$$

在缓慢变化的磁场中，磁矩是不变量，证毕。拉莫尔轨道所包围的磁通量为

$$\Phi = B\pi r_c^2 = B\pi \frac{v_{\perp}^2}{\omega_c^2} = B\pi \frac{m^2 v_{\perp}^2}{q^2 B^2} = \frac{2\pi m}{q^2} \mu = \text{const} \quad (2.73)$$

拉莫尔轨道上的磁通也是不变量。

2.3.2 带电粒子在缓慢变化的电场中的极化漂移

考虑电磁场空间均匀，电场随时间缓慢变化

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(i\omega t) = E_0 \exp(i\omega t) \hat{\mathbf{e}}_x \quad (2.74)$$

带电粒子的运动方程为

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (2.75)$$

再次对时间求导

$$\frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2} = \frac{q}{m} \frac{d\mathbf{E}}{dt} + \frac{q^2}{m^2} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \quad (2.76)$$

整理得

$$\frac{d\mathbf{v}^2}{dt} + \omega_c^2 \mathbf{v} = \omega_c^2 \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} + \frac{q}{m} \frac{d\mathbf{E}}{dt} \quad (2.77)$$

这是一个受迫振动的线性常微分方程，左边齐次方程的通解是拉莫尔回旋运动，非齐次方程的特解代表回旋中心的漂移运动。容易求出

$$\mathbf{v}_D = \frac{\omega_c^2}{\omega_c^2 - \omega^2} \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} + \frac{q/m}{\omega_c^2 - \omega^2} \frac{d\mathbf{E}}{dt} \quad (2.78)$$

对于缓慢变化的电场， $\omega \ll \omega_c$ ，则有

$$\mathbf{v}_D = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} + \frac{1}{\omega_c B} \frac{d\mathbf{E}}{dt} \quad (2.79)$$

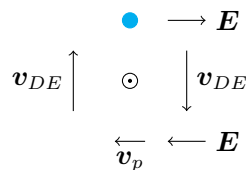
第一项为通常的电漂移速度，第二项为极化漂移速度，记为 \mathbf{v}_p

$$\mathbf{v}_p = \frac{1}{\omega_c B} \frac{d\mathbf{E}}{dt} \quad (2.80)$$

极化漂移速度对于电子和离子是不同的，因此会产生极化电流

$$\mathbf{J}_p = ne(\mathbf{v}_{pi} - \mathbf{v}_{pe}) = \frac{n(m_i + m_e)}{B^2} \frac{d\mathbf{E}}{dt} = \frac{\rho}{B^2} \frac{d\mathbf{E}}{dt} \quad (2.81)$$

极化漂移的物理根源：**电场突然改变方向**。考虑粒子开始时静止，突然加一电场 \mathbf{E} ，只有当粒子被加速到一定的速度后才感受到洛伦兹力的作用并向下运动。若 \mathbf{E} 为常数，则只有电漂移速度 \mathbf{v}_E ；若 \mathbf{E} 突然改变方向，则回旋轨道的左右半径大小也突然改变，回旋中心会产生一个向左的极化漂移速度 \mathbf{v}_p 。



2.4 绝热不变量

在等离子体物理学中，绝热不变量是指在一个缓慢变化的系统中，若并不具有完全周期性的运动的运动积分仍为常数，则该运动积分被称为**绝热不变量**。这里缓慢变化的含义是：场的特征参量 λ 在一个周期 τ 内的改变远小于参量本身，即

$$\tau \frac{d\lambda}{dt} \ll \lambda \quad \left| \frac{1}{\omega_c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right|_{t=t_0} \ll |\mathbf{B}|_{t=t_0} \quad (2.82)$$

粒子在一个运动周期内的作用积分

$$J = \oint pdq \quad (2.83)$$

是一个近似不随场改变的物理量，称为绝热不变量，其中 p 和 q 分别是广义动量和广义坐标。

2.4.1 磁矩的不变性和磁镜效应

将粒子在缓慢变化磁场中拉莫尔回旋轨道近似看作闭合轨道，选取广义坐标 θ ，广义动量为角动量 $p_\theta = mv_\perp r_c$ ，则一周内的积分为

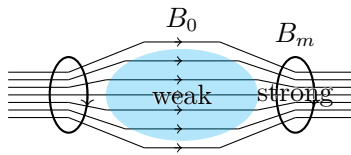
$$\oint pdq = \oint mv_\perp r_c d\theta = 2\pi mv_\perp r_c = 2\pi \frac{mv_\perp^2}{\omega_c} = 4\pi \frac{m}{q} \mu = \text{const} \quad (2.84)$$

故磁矩 $\mu = \text{const}$ 。

磁矩不变性的一个直接应用就是**磁镜效应**。由于磁矩

$$\mu = \frac{mv_\perp^2}{2B} \quad (2.85)$$

具有不变性，在磁场强的位置粒子的垂直速度变大，由于磁场力不做功，粒子的总动能不变，因此粒子的平行速度变小。当粒子沿磁感线运动时，有些平行速度小的粒子会在某处完全丧失平行方向的动能，这样就会被该处的磁场“反射”而向相反方向运动。



对于给定的磁镜场，有些粒子能被约束，称为约束粒子，有些粒子则能自由地穿过线圈，称为逃逸粒子。下面讨论约束的条件。设粒子在 B_0 处的垂直、平行、总速率分别为 $v_{\perp 0}, v_{\parallel 0}, v_0$ ，对于在 B_m 处被反射的粒子，有

$$\frac{v_{\perp 0}^2}{B_0} = \frac{v_0^2}{B_m} \quad (2.86)$$

即

$$\frac{B_0}{B_m} = \frac{v_{\perp 0}^2}{v_0^2} = \sin^2 \theta_m \quad (2.87)$$

对于 $\theta < \theta_m$ 的粒子，由于其平行速度较大，当其运动到磁颈处还有剩余的平行速度，因此能通过磁颈逃逸出去；反之则被约束在磁镜中。

$$R_m = \frac{B_m}{B_0} \quad (2.88)$$

被称为**磁镜比**。

2.4.2 纵向不变量和费米加速问题

磁镜中约束粒子沿着磁感线来回反射，是周期性运动，因此沿着轨道的积分

$$J = \int_a^b v_{\parallel} ds \quad (2.89)$$

是不变量。纵向不变量可以用于解释费米加速问题。假设磁镜两端缓慢靠近 ($L \rightarrow L'$)，根据纵向不变量，有 $v'_{\parallel} L' = v_{\parallel} L$ ，粒子动能

$$E' = \frac{1}{2} m v_{\parallel}'^2 + \frac{1}{2} m v_{\perp}'^2 = \frac{1}{2} m v_{\parallel}'^2 + \mu B = \frac{1}{2} m v_{\parallel}'^2 \left(\frac{L}{L'} \right)^2 + \mu B > E \quad (2.90)$$

故磁镜两端缓慢靠近，粒子能量增加。

2.4.3 磁通不变量

在缓慢变化的磁场中，磁通 Φ 是一个不变量。

2.5 带电粒子在高频电磁波中的运动

空间和时间缓慢变化不再适用。假设没有静场，真空中的电磁波沿着 z 方向传播

$$\mathbf{E}(z, t) = E_0 \cos(kz - \omega t) \hat{e}_x \quad \mathbf{B}(z, t) = B_0 \cos(kz - \omega t) \hat{e}_y \quad (2.91)$$

磁场力和电场力的比值

$$\frac{F_B}{F_E} = \frac{v B_0}{E_0} = \frac{v}{c} \quad (2.92)$$

由此我们分两种情况考虑。当粒子低速运动时，磁场力可以忽略；当粒子高速运动时，电场力和磁场力同量级。

2.5.1 在弱电磁波中的颤抖运动

在弱电磁波中，粒子速度远小于光速，此时可以忽略磁场力的作用，运动方程为

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{E} = q\mathbf{E}_0 \cos(kz - \omega t) \quad (2.93)$$

直接积分得到粒子的速度

$$\mathbf{v} = -\frac{q\mathbf{E}_0}{m\omega} [\sin(kz - \omega t) - \sin(kz)] \quad (2.94)$$

若不考虑初始条件，第一项代表粒子在波中的振动，称为颤抖 (quiver) 速度

$$\mathbf{v}_q = -\frac{q\mathbf{E}_0}{m\omega} \sin(kz - \omega t) \quad (2.95)$$

由于颤抖速度与粒子质量成反比，因此电子的颤抖速度远大于离子，因此通常在电磁波中往往只考虑电子的响应而忽略离子的响应。通常将电子的颤抖速度与光速的比值用来衡量电磁波的强弱，记为

$$\alpha = \frac{|v_{qe}|}{c} = \frac{eE_0}{m_e \omega c} = 8.55 \times 10^{-10} I^{1/2} \lambda \quad (2.96)$$

2.5.2 高频电磁场的作用与有质动力

考虑在一维情况，粒子在 x 方向运动，在高频电磁波下，运动方程为

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = qE(x, t) = qE_0(x) \cos \omega t \quad (2.97)$$

我们采用**振荡中心近似**的方法研究高频电磁场下粒子运动问题，即将粒子运动看成振荡中心缓慢运动与高速运动的叠加 $x = x_0 + x_1$ ，其中 x_0 为缓变部分，称为粒子的振荡中心， $x_0 = \langle x \rangle$ ； x_1 为快变部分。将电场在振荡中心展开

$$E_0(x) = E_0(x_0) + x_1 \left(\frac{dE_0}{dx} \right)_{x=x_0} + \dots \quad (2.98)$$

将上式代入方程 (2.97)，得到带电粒子在电场的高频分量中的运动方程为

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = qE_0(x_0) \cos \omega t \quad (2.99)$$

解得

$$x_1 = -\frac{qE_0(x_0)}{m\omega^2} \cos \omega t \quad (2.100)$$

带电粒子在电场的低频分量中的运动方程为

$$m \frac{d^2 x_0}{dt^2} = m \frac{d^2 \langle x \rangle}{dt^2} = \left\langle qx_1 \frac{dE_0(x_0)}{dx} \cos \omega t \right\rangle = -\frac{q^2 E_0(x_0)}{m\omega^2} \frac{dE_0(x_0)}{dx} \langle \cos^2 \omega t \rangle = -\frac{q^2 E_0(x_0)}{2m\omega^2} \frac{dE_0(x_0)}{dx} \quad (2.101)$$

于是得到有质动力

$$F_p = -\frac{q^2}{4m\omega^2} \frac{dE_0^2}{dt} \quad (2.102)$$

推广到更一般的三维情况

$$\mathbf{F}_p = -\frac{q^2}{4m\omega^2} \nabla E^2 \quad (2.103)$$

有质动力是空间非均匀的高频电磁场对带电粒子的等效力，是电磁场压强的作用力（电磁场能量密度的梯度为压力），由于**带电粒子与电磁场的强烈耦合**，电磁场压力可以施加在带电粒子上，这就是有质动力来源。

有质动力的方向与粒子电荷正负无关，总是指向**电场强度减弱**的方向。力的大小与粒子质量成反比，很明显对电子的作用远大于对离子的作用，故讨论有质动力时，常常忽略对离子的影响。

2.5.3 电子加速问题

激光作用在粒子上的有质动力推着粒子走，使粒子加速得到能量。

2.6 总结：引导中心漂移公式汇总

- 任意常数力场

$$\mathbf{v}_f = \frac{1}{q} \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (2.104)$$

- 电场

$$\mathbf{v}_E = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (2.105)$$

- 重力场

$$\mathbf{v}_g = \frac{m \mathbf{g} \times \mathbf{B}}{q B^2} \quad (2.106)$$

- 非均匀电场

$$\mathbf{v}_E = \left(1 + \frac{1}{4}r_c^2\nabla^2\right) \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (2.107)$$

- 非均匀磁场梯度漂移

$$\mathbf{v}_{\nabla B} = \pm \frac{1}{2}v_{\perp}r_c \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^2} \quad (2.108)$$

- 曲率漂移

$$\mathbf{v}_R = \frac{mv_{\parallel}^2}{q} \frac{\mathbf{R}_C \times \mathbf{B}}{R_C^2 B^2} \quad (2.109)$$

- 弯曲磁场

$$\mathbf{v}_R + \mathbf{v}_{\nabla B} = \frac{m}{q} \left(v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2}v_{\perp}^2\right) \frac{\mathbf{R}_C \times \mathbf{B}}{R_C^2 B^2} \quad (2.110)$$

- 极化漂移

$$\mathbf{v}_p = \pm \frac{1}{\omega_c B} \frac{d\mathbf{E}}{dt} \quad (2.111)$$

2.7 习题及参考答案

1. 磁场中，等离子体中粒子漂移的根源是什么？以电漂移为例阐明粒子漂移的产生。

根源：粒子运动轨迹不封闭导致漂移。以电漂移为例，粒子做回旋运动瞬时的回旋半径为 v_{\perp}/ω_c ，粒子速度越大，回旋半径越大。粒子在受电场加速的半个运动周期内， v_{\perp} 增大，导致回旋半径 r_L 增大；粒子在受到电场减速的半个运动周期内， v_{\perp} 减小，导致回旋半径 r_L 减小。最终导致粒子轨迹在垂直于磁场方向上的投影不再是一个封闭的圆，即粒子产生漂移运动。

2. 弯曲的磁场一定是不均匀的，存在哪些漂移？

曲率漂移和梯度漂移。

3. 弯曲的磁场一定是不均匀的，反过来呢

在无电流空间，弯曲的磁场一定是不均匀的，由于磁场散度为零条件性质，在曲率方向上强度降低。反过来也是。

4. 证明：电荷在磁场缓慢变化的区域内运动时，虽然拉莫尔半径发生变化，但磁矩保持不变。

粒子在垂直于磁场方向上的运动方程

$$m \frac{d\mathbf{v}_{\perp}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B})$$

垂直磁场方向上动能的变化为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_{\perp}^2 \right) = m \mathbf{v}_{\perp} \cdot \frac{d\mathbf{v}_{\perp}}{dt} = q \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_{\perp} = q \mathbf{E} \cdot \frac{d\mathbf{l}}{dt}$$

对一个周期积分

$$\delta \left(\frac{1}{2} m v_{\perp}^2 \right) = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_c}} q \mathbf{E} \cdot \frac{d\mathbf{l}}{dt} dt = \int_{l_0}^{l_1} q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

由于 \mathbf{B} 缓慢变化，将轨道近似为闭合的积分路径

$$\delta \left(\frac{1}{2} m v_{\perp}^2 \right) = \oint q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = q \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = -q \int_S \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} = \frac{m v_{\perp}^2}{2B} \delta B = \mu \delta B$$

其中 δB 是在一个回旋周期内磁感应强度的变化量。另一方面，由磁矩 μ 的定义 $\mu = mv_{\perp}^2/2B$ ，有

$$\delta(\mu B) = \delta\left(\frac{1}{2}mv_{\perp}^2\right) = \mu\delta B$$

由此 $\delta\mu = 0$ ，即在缓慢变化的磁场中，磁矩是不变量，证毕。

5. 电漂移和重力漂移的区别是什么？

电漂移与粒子性质无关；重力漂移与粒子性质有关，正负粒子漂移方向相反，有电荷分离的趋势。

$$\mathbf{v}_E = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad \mathbf{v}_g = \frac{m \mathbf{g} \times \mathbf{B}}{q B^2}$$

6. 从电荷运动图像出发，分析为何电漂移速度与粒子 (1) 电荷正负 (2) 质量 (3) 速度无关？

- (1) 正负电荷的回旋运动旋转方向相反，但在电场中加速的方向亦相反，使得电漂移与电荷正负无关。
- (2) 粒子在电场中的加速度及回旋频率与质量成反比，而漂移速度与两者之比相关，所以漂移运动与质量无关。
- (3) 粒子在电磁场中加速度和回旋频率都与速度无关，故漂移运动与粒子速度无关。

$$\mathbf{v}_E = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}$$

7. 电漂移公式中在磁场趋于零时，漂移速度无穷大，合理吗？

不合理。需要考虑相对论效应和有限拉莫尔半径效应。

8. 对磁镜场约束对带电粒子，若缓慢地增强磁场，则粒子的垂直能量会增加，磁场本身不会对粒子做功，那么粒子是如何得到能量的？

在磁镜场中磁矩为不变量

$$\mu = \frac{mv_{\perp}^2}{2B}$$

因此磁场增强，粒子的垂直能量也随之增加。值得注意的是，虽然磁场不做功，但磁场但梯度会产生一个等效力 $\mathbf{F}_{\parallel} = -\mu\nabla_{\parallel} B$ ，使得粒子在运动过程中平行能量和垂直能量发生转化。

9. 解释费米加速、极光、范艾伦辐射带现象。

- **费米加速**：宇宙中存在磁云，有强弱磁场区域，当带电粒子被捕获后，由于磁云的相对运动，带电粒子的能量不断增加。被约束的粒子运动到磁颈会被反射，如果两个线圈缓慢靠近，相对于磁颈，粒子被反射，相当于磁场的运动能量传递给了粒子，于是粒子被加速。
- **极光**：极光是地球周围的一种大规模放电的过程。来自太阳的带电粒子到达地球附近，地球磁场迫使其中一部分沿着磁感线集中到南北两极。当带电粒子进入极地的高层大气时，与大气中的原子和分子碰撞并激发，产生极光。
- **范艾伦辐射带**：地球是个大磁体，两极处磁场强，赤道处磁场弱，构成一个天然的磁镜。来自于太阳风中的电荷粒子被这个磁镜捕获，电荷沿着地磁场在两极之间运动而形成范艾伦辐射带。范艾伦辐射带分为内外两层，外带主要是高能电子，内带主要是高能离子。

10. 什么是磁场的时空弱不均匀性条件？

(a) 空间条件 (粒子回旋运动轨道内, 磁场的相对变化值为小量)

$$|(\mathbf{r}_c \cdot \nabla) \mathbf{B}|_{\mathbf{r}_c=0} \ll |\mathbf{B}|_{\mathbf{r}_c=0} \quad (2.112)$$

(b) 时间条件 (粒子回旋运动周期内, 磁场的相对变化值为小量)

$$\left| \frac{1}{\omega_c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right|_{\mathbf{r}_c=0} \ll |\mathbf{B}|_{\mathbf{r}_c=0} \quad (2.113)$$

11. 什么是有限拉莫尔半径效应?

磁场强度的有限性而产生有限的拉莫尔半径, 因此粒子在做拉莫尔回旋运动时在轨道的不同位置会感受到磁场强度的不同, 在不同位置的回旋半径也会有所修正, 这种情况下产生的漂移称为有限拉莫尔半径效应。

12. 为什么简单的弯曲磁场无法约束等离子体?

简单的弯曲磁场一定存在曲率漂移, 这种漂移最终会使粒子离开磁场约束区域。对于由大量电子、离子构成的等离子体系统, 曲率和梯度漂移还会以另一种方式削弱磁场的约束性能: 由于漂移使电子与离子分别向相反方向运动, 将导致电荷分离而形成电场, 新生的电场所产生的电漂移会使等离子体整体向外漂移, 最终破坏约束。

13. 磁镜场为何能约束等离子体?

粒子在磁镜场中受到沿磁感线方向的平均力 $F_{\parallel} = -\mu \nabla_{\parallel} B$, 由于这个力的存在, 等离子体被约束在磁镜中, 且与电荷属性无关。

14. 利用纵向不变性解释费米加速效应

假设磁镜两端缓慢靠近 ($L \rightarrow L'$), 根据纵向不变量 $J = \int_a^b v_{\parallel} ds = \text{const}$, 有 $v'_{\parallel} L' = v_{\parallel} L$, 粒子动能

$$E' = \frac{1}{2} m v'^2_{\parallel} + \frac{1}{2} m v'^2_{\perp} = \frac{1}{2} m v'^2_{\parallel} + \mu B = \frac{1}{2} m v^2_{\parallel} \left(\frac{L}{L'} \right)^2 + \mu B > E \quad (2.114)$$

故磁镜两端缓慢靠近, 粒子能量增加。

15. 试分析“镜面”相互接近系统如何传递能量给所捕获的粒子。

“镜面”相互接近时, 粒子处在变化的磁场中, 变化磁场产生的电场最终加速了粒子。恒定磁场本身不加速带电粒子, 而变化的磁场会。

16. 对磁镜场约束的带电粒子, 若缓慢地增强磁场, 则粒子的垂直能量会增加, 磁场本身不会对粒子做功, 那么粒子是如何得到能量的?

变化的磁场产生的电场最终加速了粒子。

17. 本章中所处理的粒子在电磁场中的运动可以分成回旋运动与漂移运动的合成, 对哪些情况我们要求漂移运动的速度远小于回旋运动速度, 哪些情况则不需要这样的假设?

对外力漂移不需要这样假设, 对由于引导中心近似所产生的等效力则需要。

18. 绝热不变量的条件是什么? 具体到电子磁矩绝热不变的条件为何?

要求外参数是缓变的, 即外参数变化的时间尺度远大于系统运动的周期。具体到电子磁矩绝热不变则要求外界磁场的变化频率 (对非周期变化, 则为相对变化率) 远小于电子回旋频率。

3 磁流体力学

3.1 流体力学

3.1.1 流体的概念

流体是受任何微小剪切力作用都能连续变形的物体，宏观性质主要为易流动性、粘性及压缩性。

1. **易流动性**：流体在静止时不能承受切向应力，不管多小的切向应力，都会引起其中各流体元彼此间的相对位移，且取消力的作用后，流体元之间并不恢复其原有位置。
2. **粘性**：流体在运动时，对相邻两层流体间的相对运动即相对滑动速度是有抵抗的，这种抵抗力称为粘性应力。实验表明，粘性应力的大小与相对速度成正比。
3. **压缩性**：液体在通常的压力或温度下，压缩性很小。因此在一般情形下液体可以近似看成是不可压缩的。

流体宏观模型认为流体是由无数**流体元**连续组成的。微观上充分大、宏观上充分小的流体元称为**流体质点**，将流体运动的空间看作是由流体质点连续地无空隙地充满着假设称为**连续介质假设**。

3.1.2 研究方法

- **Lagrange 法**：着眼于流体质点。流体质点的运动可表示为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(a, b, c; t) \quad \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{r}(a, b, c; t)}{\partial t} \quad \dot{\mathbf{u}} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}(a, b, c; t)}{\partial t^2} \quad (3.1)$$

在直角坐标系中有分量形式

$$\begin{cases} x = x(a, b, c; t) \\ y = y(a, b, c; t) \\ z = z(a, b, c; t) \end{cases} \quad \begin{cases} u_x = \partial x(a, b, c; t) / \partial t \\ u_y = \partial y(a, b, c; t) / \partial t \\ u_z = \partial z(a, b, c; t) / \partial t \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{u}_x = \partial^2 x(a, b, c; t) / \partial t^2 \\ \dot{u}_y = \partial^2 y(a, b, c; t) / \partial t^2 \\ \dot{u}_z = \partial^2 z(a, b, c; t) / \partial t^2 \end{cases} \quad (3.2)$$

- **Euler 法**：用场的观点研究流体运动，目前流体研究中常常采用的就是 Euler 法。将空间某一点 (x, y, z) 的流体质点的速度 \mathbf{u} 当作时间的函数来研究

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x(t), y(t), z(t); t) \quad (3.3)$$

与牛顿力学中质点的加速度不同，流体元的加速度来源有二，即速度场的非恒定性和非均匀性

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} u_x + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} u_y + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} u_z = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad (3.4)$$

对与运动着的个别流体质点相联系的任何标量函数 φ 、矢量函数 \mathbf{a} 或张量函数 \vec{T} ，均有

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \varphi \quad (3.5)$$

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{a} \quad (3.6)$$

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{\partial \vec{T}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \vec{T} \quad (3.7)$$

3.1.3 应力张量

作用于流体质点的力，可分为**体积力**和**表面力**。体积力是长程力，可以穿越空间作用到流体元上，如重力、电磁力、惯性力；表面力是短程力，只有通过相互接触才能发挥作用，如压力、切应力等，通常作用在单位侧面积上的表面力称为**应力**，可以表示为

$$\mathbf{p} = \frac{d\mathbf{f}}{d\sigma} \quad (3.8)$$

应力可以表示为小面元的单位法向矢量与某个张量的乘积，这个张量是一个空间位置的单值函数，与面元的方向无关，同时可以用于确定应力，即

$$\mathbf{p} = \hat{\mathbf{e}}_n \cdot \vec{\mathbf{P}} \quad (3.9)$$

对于理想流体，假设它是无粘性的，故其应力的切向分量都等于零，作用于任一面元的应力只是正压力

$$\vec{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} p_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & p_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & p_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} = -p\vec{\mathbf{I}} \quad (3.10)$$

实验证明，两层流体之间存在摩擦切应力，可以表示为

$$p_{xz} = \eta \frac{du_x}{dz} \quad (3.11)$$

其中 η 为粘滞系数，它只与流体本身的物理性质和温度有关。一般情况下，对于不可压缩流体

$$\vec{\mathbf{P}} = - \left(\rho + \frac{2}{3}\eta\nabla \cdot \mathbf{u} \right) \vec{\mathbf{I}} \quad (3.12)$$

3.1.4 基本方程

1. **连续性方程**：单位时间流体元内质量增量等于单位时间流入与流出流体元质量差

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} \rho d\tau = - \int_{\Sigma} \rho \mathbf{u} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = - \int_{\tau} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) d\tau \quad (3.13)$$

由于体积 τ 的任意性，有

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0} \quad (3.14)$$

由于

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\rho = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) - \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (3.15)$$

故连续性方程也可表示为

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0} \quad (3.16)$$

对于定常流动情况 ($\partial \rho / \partial t = 0$)，连续性方程变为

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (3.17)$$

对于不可压缩流体 ($d\rho/dt = 0$)，连续性方程变为

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.18)$$

2. **运动方程**: 流体元的动量改变等于其所受合力

$$\int_{\tau} \rho \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} \right) d\tau = \int_{\tau} \rho \mathbf{g} d\tau + \int_{\Sigma} \mathbf{p}_n d\sigma = \int_{\tau} \rho \mathbf{g} d\tau + \int_{\tau} (\nabla \cdot \vec{\mathbf{P}}) d\tau \quad (3.19)$$

由于体积 τ 的任意性, 有

$$\boxed{\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \nabla \cdot \vec{\mathbf{P}} + \rho \mathbf{g}} \quad (3.20)$$

对于一般情况下的不可压缩性流体

$$\vec{\mathbf{P}} = - \left(p + \frac{2}{3} \eta \nabla \cdot \mathbf{u} \right) \vec{\mathbf{I}} \quad (3.21)$$

运动方程也可写成

$$\boxed{\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p} \quad (3.22)$$

3. **能量方程**: 体积 τ 内流体的总能量改变率等于单位时间内体积力和表面力所做的功加上从表面流入的热能

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho \left(\varepsilon + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) d\tau &= \int_{\tau} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} d\tau + \int_{\Sigma} \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{u} d\sigma - \int_{\Sigma} \mathbf{q} \cdot d\sigma \\ &= \int_{\tau} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} d\tau + \int_{\tau} \nabla \cdot (\vec{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{u}) d\tau - \int_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{q} d\tau \end{aligned} \quad (3.23)$$

其中 \mathbf{q} 为热流矢量。由于体积 τ 的任意性, 有

$$\boxed{\rho \frac{d}{dt} \left(\varepsilon + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) = \nabla \cdot (\vec{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{u}) + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{q}} \quad (3.24)$$

若所研究的问题不涉及内能的变化 (热量交换), 无需使用能量方程。

3.2 磁流体力学方程组

磁流体力学基本方程组包括考虑介质运动的电动力学方程组和考虑磁场力的流体力学基本方程组。

电动力学方程组	麦克斯韦方程组	$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho_q}{\varepsilon_0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned}$
	洛伦兹力公式	$\mathbf{f} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$
	欧姆定律	$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$
流体力学基本方程组	连续性方程	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$
	运动方程	$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p + \rho_q \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}$
	能量方程	$\rho \frac{d}{dt} \left(\varepsilon + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) = \nabla \cdot (\vec{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} - \nabla \cdot \mathbf{q}$
状态方程	状态方程	$p\rho^{-\gamma} = \text{const}$

3.2.1 电动力学方程组

对于准静态电磁场 ($c/\omega \ll L$ 且 $\sigma/\varepsilon_0\omega \ll 1$), 运动导电流体内的电动力学方程组可以写成

• 麦克斯韦方程组

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.25)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (3.26)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_q}{\varepsilon_0} \quad (3.27)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.28)$$

• 洛伦兹力公式

$$\mathbf{f} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (3.29)$$

• 欧姆定律

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (3.30)$$

3.2.2 考虑电磁力的流体力学方程

1. 连续性方程：等离子体是一种流体，必须服从流体的连续性方程，这个方程无需改变。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (3.31)$$

2. 运动方程：必须考虑洛伦兹力

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \nabla \cdot \vec{\mathbf{P}} + \rho_q \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} = -\nabla p + \rho_q \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (3.32)$$

3. 能量方程：需考虑焦耳热，重力所做的功可忽略不计

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\varepsilon + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) = \nabla \cdot (\mathbf{P} \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (3.33)$$

3.2.3 状态方程

为了使上述得到的方程组封闭，还必须给出流体的状态方程，其中 $\gamma = c_p/c_v$

$$p\rho^{-\gamma} = \text{const} \quad (3.34)$$

3.3 磁压力与磁张力

本小节分析磁场的作用力项 $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ （洛伦兹力）的性质：

$$\mathbf{f} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = -\frac{1}{2\mu_0} \nabla B^2 + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot \left(\mathbf{B}\mathbf{B} - \frac{1}{2} B^2 \vec{\mathbf{I}} \right) = \nabla \cdot \vec{\mathbf{T}} \quad (3.35)$$

其中

$$\vec{\mathbf{T}} = \frac{1}{\mu_0} \left(\mathbf{B}\mathbf{B} - \frac{1}{2} B^2 \vec{\mathbf{I}} \right) \quad (3.36)$$

为磁应力张量。作用在某一体积 τ 上磁场的合力为

$$\mathbf{F} = \int_{\tau} \mathbf{f} d\tau = \int_{\tau} \nabla \cdot \vec{\mathbf{T}} d\tau = \oint_{\Sigma} \vec{\mathbf{T}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n d\sigma = \oint_{\Sigma} \mathbf{T}_n d\sigma \quad (3.37)$$

其中

$$\mathbf{T}_n = \vec{T} \cdot \hat{e}_n = \frac{1}{\mu_0} \left[\mathbf{B}(\mathbf{B} \cdot \hat{e}_n) - \frac{1}{2} B^2 \hat{e}_n \right] \quad (3.38)$$

为磁应力。第一项沿磁场方向，称为磁张力（ $\hat{\mathbf{b}}$ 为沿磁场方向的单位矢量， θ 为面元法向与磁场方向的夹角）

$$\mathbf{T}_{nt} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}(\mathbf{B} \cdot \hat{e}_n) = \frac{B^2}{\mu_0} \cos \theta \hat{\mathbf{b}} \quad (3.39)$$

第二项与面元法向相反，称为磁压力

$$\mathbf{T}_{np} = \frac{1}{2\mu_0} B^2 (-\hat{e}_n) = -\frac{B^2}{2\mu_0} \hat{e}_n \quad (3.40)$$

则

$$\mathbf{F} = \oint_{\Sigma} \frac{B^2}{\mu_0} \cos \theta \hat{\mathbf{b}} d\sigma + \oint_{\Sigma} \frac{B^2}{2\mu_0} (-\hat{e}_n) d\sigma \quad (3.41)$$

作用于某流体元的磁力，等效于大小为 $B^2/2\mu_0$ 的各向同性的磁压力与大小为 B^2/μ_0 沿磁感线方向的磁张力之和。

3.4 磁扩散与磁冻结

本小节研究导电流体和磁场相互作用的重要性质——磁场的扩散与冻结。

3.4.1 磁感应方程

由麦克斯韦方程

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.42)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (3.43)$$

和欧姆定律

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (3.44)$$

得到

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla^2 \mathbf{B} \quad (3.45)$$

设磁粘滞系数

$$\eta_m = \frac{1}{\mu_0 \sigma} \quad (3.46)$$

则磁感应方程

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \eta_m \nabla^2 \mathbf{B}} \quad (3.47)$$

右边第一项称为对流项，第二项称为扩散项。显然，磁场在导电流体中的运动性质显著地依赖于该两项的竞争

$$\frac{|\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})|}{|\eta_m \nabla^2 \mathbf{B}|} \approx \frac{|\mathbf{u} \times \mathbf{B}|}{|\eta_m \nabla \times \mathbf{B}|} \approx \frac{UB}{\eta_m BL^{-1}} = \frac{UL}{\eta_m} \quad (3.48)$$

其中 L 为等离子体特征长度， U 为流体运动的特征速度，定义磁雷诺数

$$R_m = \frac{UL}{\eta_m} \quad (3.49)$$

以下考虑两种极端情况：

- 磁扩散效应： $\eta_m \rightarrow \infty$, $R_m \ll 1$
- 磁冻结效应： $\eta_m \rightarrow 0$, $R_m \gg 1$

3.4.2 磁扩散效应

当 $R_m \ll 1$ 时, 近似把等离子体看成没有流动和对流, 磁感应方程化为

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \eta_m \nabla^2 \mathbf{B} \quad \eta_m = \frac{1}{\mu_0 \sigma} \quad (3.50)$$

这也是我们熟悉的**扩散方程**。它表示, 由于电阻效应引起感应电流的衰减, 磁场将从强度大的区域向强度小的区域扩散, 力求将锐边界两侧磁场的落差“抹平”。考虑一维情况

$$\frac{\partial B(x, t)}{\partial t} = \eta_m \frac{\partial^2 B(x, t)}{\partial x^2} \quad (3.51)$$

边界条件

$$B(x=0, t=0) = B_0 \quad B(x \neq 0, t=0) = 0 \quad (3.52)$$

得到方程的解

$$B(x, t) = \frac{B_0}{\sqrt{\pi \eta_m t}} \exp\left(-\frac{x^2}{\eta_m t}\right) \quad (3.53)$$

磁场进入到等离子体一段距离后, 迅速衰减到原来的 $1/e$, 这个距离定义为穿透深度 L_m , 从而得到磁场穿透深度 L_m 所需特征时间 τ_m

$$\tau_m = \frac{L_m^2}{\eta_m} = \mu_0 \sigma L_m^2 \quad (3.54)$$

当所考虑的过程进行得非常之快, 以致在时间 τ 内磁场所能渗透的深度远小于等离子体的空间特征尺度 L , 即

$$\tau \ll \mu_0 \sigma L^2 \quad (3.55)$$

此时等离子体可以被看成是理想导体 ($\sigma \rightarrow \infty$)。

当研究磁场在等离子体中的变化时, 一般是不允许把等离子体看成是不流动的导电流体的, 它们总是相互扩散。那么什么条件下磁场可以进入等离子体中, 且保持稳定?

在稳定的情况下 $\partial \mathbf{B} / \partial t = 0$, 有

$$\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \eta_m \nabla^2 \mathbf{B} = \nabla \times [(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \eta_m \nabla \times \mathbf{B}] = 0 \quad (3.56)$$

于是

$$\mathbf{u} \times \mathbf{B} = \eta_m \nabla \times \mathbf{B} \quad (3.57)$$

方程两边同时叉乘 \mathbf{B}

$$\mathbf{B} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = B^2 \mathbf{u} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{B} = \eta_m \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (3.58)$$

故垂直于磁场的速度

$$\mathbf{u}_\perp = \frac{1}{B^2 \mu_0 \sigma} [\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})] = -\frac{1}{B^2 \sigma} \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (3.59)$$

在稳态情况下, 有

$$\nabla p = \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (3.60)$$

假设温度分布均匀

$$\mathbf{u}_\perp = -\frac{\nabla_\perp p}{B^2 \sigma} = -\frac{(T_i + T_e) \nabla_\perp n}{B^2 \sigma} \quad (3.61)$$

由于电导率

$$\sigma \approx \frac{ne^2}{m_e \nu_{ei}} \quad (3.62)$$

故垂直磁场的流速

$$\mathbf{u}_\perp = -\frac{m_e \nu_{ei} (T_i + T_e)}{e^2 B^2} \frac{\nabla_\perp n}{n} = -D_{e\perp} \frac{\nabla_\perp n}{n} \quad (3.63)$$

其中 $D_{e\perp}$ 是流体垂直于磁场的扩散系数, ν_{ei} 是电子和离子的碰撞频率

$$D_{e\perp} = \frac{m_e \nu_{ei} (T_i + T_e)}{e^2 B^2} \quad (3.64)$$

公式 (3.63) 说明垂直于磁场的流速与垂直于磁场的密度梯度之间的关系, 值得注意的是, 这个等式成立的前提是**稳态条件**。所以在具有有限碰撞频率的等离子体中, 只有存在**横越磁场的稳态扩散流**, 磁场才能扩散到等离子体中, 并稳定存在于等离子体中, 且磁场的方向可以得到维持。然而, 从扩散系数表达式可以看出, 磁场足够大的时候, 横向扩散可以被限制在很小的范围内。

磁扩散的本质是**电磁感应**。在介质的某区域, 磁场的变化引起感应电场与电流, 此电流又产生磁场, 从而使磁场从强度大的区域向强度小的区域扩散。由于导体的欧姆耗散, 一部分磁能变成热能, 引起磁场的衰减, 现在考虑磁能随时间的变化率。

$$\frac{\partial W_m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_\tau \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau \right) = \frac{1}{\mu_0} \int_\tau \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\tau \quad (3.65)$$

其中

$$\mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \eta_m \mathbf{B} \cdot \nabla^2 \mathbf{B} = -\mu_0 \eta_m \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{J}) = -\mu_0 \eta_m [\nabla \cdot (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) + (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{J}] \quad (3.66)$$

代入上式得

$$\frac{\partial W_m}{\partial t} = -\eta_m \int_\Sigma (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} - \eta_m \int_\tau (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{J} d\tau \quad (3.67)$$

右边第一项是洛伦兹力沿磁场存在表面积分, 应为零, 于是

$$\frac{\partial W_m}{\partial t} = -\eta_m \int_\tau (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{J} d\tau = -\mu_0 \eta_m \int_\tau \mathbf{J}^2 d\tau = - \int_\tau \frac{\mathbf{J}^2}{\sigma} d\tau \quad (3.68)$$

导体流体磁能的减少是由于电阻引起的欧姆损耗。由此可见, 磁耗散过程同时又是**磁衰减**过程。

3.4.3 磁冻结效应

对于**理想导电流体**, 即当 $R_m \gg 1$, 或导电流体的电导率 $\sigma \rightarrow \infty$ 时, 磁感应方程化为

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (3.69)$$

该方程的意义是: 磁场的变化如同磁感线粘附于流体质元上, 或者说磁感线被冻结在导电流体中。所以该方程也叫**冻结方程**。

严格来说, 磁冻结是指

1. 开尔文定理: 通过和理想导电流体一起运动的任意封闭曲线所围面积的磁通守恒。

证明如下:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\Phi}{dt} &= \iint \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \oint \mathbf{B} \cdot (\mathbf{u} \times d\mathbf{l}) \\
 &= \iint \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} - \oint (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \\
 &= \iint \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} - \iint \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} \\
 &= \iint \left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \right] \cdot d\mathbf{S} = 0
 \end{aligned} \tag{3.70}$$

由此, 在理想导电流体中, 任意流体曲面中的磁通不随时间改变。

2. 亥姆霍兹定理: 在理想导电流体中, 起初在某磁感线上的流体元以后一直位于此磁感线上。

首先考察磁感线在导电流体中运动满足的方程

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathbf{B}}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B} \\
 &= \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{u}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B} \\
 &= (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{u}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{\mathbf{B}}{\rho} \frac{d\rho}{dt}
 \end{aligned} \tag{3.71}$$

即

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} - \frac{\mathbf{B}}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{B}}{\rho} \right) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} \tag{3.72}$$

两边同时除以 ρ , 得到

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{B}}{\rho} \right) = \left(\frac{\mathbf{B}}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{u}} \tag{3.73}$$

接着考察随流体运动的某一“线元”($\delta \mathbf{l} = \mathbf{l}_2 - \mathbf{l}_1$) 所满足的方程

$$(\mathbf{l}_2 - \mathbf{l}_1)_{t+\delta t} = (\mathbf{l}_2 - \mathbf{l}_1)_t + [\mathbf{u}(\mathbf{l}_2) - \mathbf{u}(\mathbf{l}_1)] \delta t = (\mathbf{l}_2 - \mathbf{l}_1)_t + (\mathbf{l}_2 - \mathbf{l}_1)_t \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{r}_1) \delta t \tag{3.74}$$

即

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{l}_2 - \mathbf{l}_1) = (\mathbf{l}_2 - \mathbf{l}_1) \cdot \nabla \mathbf{u} \tag{3.75}$$

也可以表示为

$$\boxed{\frac{d}{dt} (\delta \mathbf{l}) = (\delta \mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{u}} \tag{3.76}$$

比较方程 (3.73) 和方程 (3.76) 的形式, 可知 \mathbf{B}/ρ 与 $\delta \mathbf{l}$ 满足相同形式的方程, 它们的解应该是同一族曲线。若 t_0 时刻 $\delta \mathbf{l} // \mathbf{B}$, 则有

$$\frac{B}{\rho l} = \text{const} \tag{3.77}$$

故可以将冻结在等离子体中的磁感线看作一根有质量的弦, 磁感线拉长, “张力”增强, 磁场越强。

磁冻结的图像是在理想导电流体中, 一闭合曲面或一流体元在运动过程中, 其内所包含的磁感线根数不变。磁冻结分两种:

1. **绝对磁冻结**: 磁感线被冻结在等离子体流体元中, 不和等离子体产生相对运动, 等离子体流体元运动过程中将拖动磁感线一起运动, 磁感线形状发生变化;
2. **相对磁冻结**: 在等离子体流体元运动过程中, 磁感线可以进出等离子体流体元, 但等离子体流体元中磁感线根数不变。显然, 等离子体和磁感线有相对运动, 或者说等离子体会切割磁感线, **相对磁冻结会在等离子体内部建立电场。**

3.5 均匀定常磁场中的流体漂移

3.5.1 抗磁性漂移 (垂直于磁场的流体漂移)

由于 ∇p 项只出现在流体方程中, 因此存在一项流体元有而粒子没有的漂移, 它与 ∇p 有关。我们有流体运动方程

$$nm \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = qn(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \nabla p \quad (3.78)$$

由于粒子质量较小, 方程左边可以忽略, 此外漂移运动一般垂直于磁场, 改写运动方程为

$$0 = qn(\mathbf{E} + \mathbf{u}_{\perp} \times \mathbf{B}) - \nabla p \quad (3.79)$$

用 \mathbf{B} 从右边叉乘

$$0 = qn[\mathbf{E} \times \mathbf{B} + (\mathbf{u}_{\perp} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}] - \nabla p \times \mathbf{B} = qn(\mathbf{E} \times \mathbf{B} - \mathbf{u}_{\perp} B^2) - \nabla p \times \mathbf{B} \quad (3.80)$$

整理得

$$\mathbf{u}_{\perp} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} - \frac{\nabla p \times \mathbf{B}}{qnB^2} = \mathbf{u}_E + \mathbf{u}_D \quad (3.81)$$

垂直于磁场方向的漂移分两部分, 第一项是我们熟知的导向中心的电场漂移

$$\mathbf{u}_E = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (3.82)$$

第二项是导电流体中应力不均匀性引起的**抗磁性漂移**

$$\mathbf{u}_D = \frac{\mathbf{B} \times \nabla p}{qnB^2} \quad (3.83)$$

抗磁漂移是流体的漂移, 其导向中心没有移动。

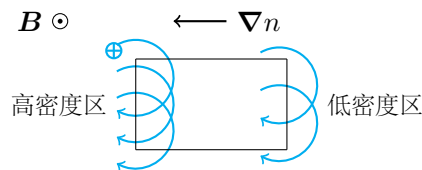
对于等离子体的准静态绝热过程 ($p = \gamma nk_B T$), 抗磁性漂移可以写成

$$\mathbf{u}_D = \frac{\gamma k_B T}{qB^2} \frac{\mathbf{B} \times \nabla n}{n} \quad (3.84)$$

抗磁性电流

$$\mathbf{J}_D = ne(\mathbf{u}_{Di} - \mathbf{u}_{De}) = \gamma(k_B T_i + k_B T_e) \frac{\mathbf{B} \times \nabla n}{B^2} \quad (3.85)$$

等离子体中的漂移电流 (抗磁性电流) 可以产生一个新的磁场, 这个磁场与原磁场方向相反, 这就是为什么把等离子体中与应力 ∇p 有关的漂移称为**抗磁性漂移**。



上图为离子抗磁漂移示意图，密度梯度从右向左，显然通过任何体积向下运动的离子比向上运动的离子多，于是产生一个向下的漂移。我们注意到抗磁漂移速度及电流都与离子质量无关，这是因为抗磁漂移是回旋运动和热运动综合的结果，而这两个运动速度都与质量成反比，相互抵消，所以抗磁漂移与电荷质量无关。

3.5.2 玻尔兹曼关系 (平行于磁场的流体漂移)

考虑运动方程的 z 分量 (即沿磁场方向的分量)

$$nm \left[\frac{\partial u_z}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_z \right] = qnE_z - \frac{\partial p}{\partial z} \quad (3.86)$$

忽略对流项，为了避免复杂的论证，将 u_z 视为空间均匀的，设温度也是空间均匀的，则

$$m \frac{\partial u_z}{\partial t} = qE_z - \frac{\gamma k_B T}{n} \frac{\partial n}{\partial z} \quad (3.87)$$

若将方程用于无质量的电子，取极限 $m \rightarrow 0$ ，并使 $q = -e$ ， $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ ， $\gamma = 1$ ，则有

$$eE_z = -e \frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{k_B T_e}{n} \frac{\partial n}{\partial z} \quad (3.88)$$

解得

$$n = n_0 \exp\left(\frac{e\phi}{k_B T_e}\right) \quad (3.89)$$

该式称为电子的**玻尔兹曼关系**。其物理意义为：沿磁感线电子的运动是自由的，由于电子很轻，一旦有一个净力加到电子上，它们很快就被加速到高能量。由于离子运动缓慢，电子一运动就会导致电荷分离，从而产生静电场而阻碍电子的运动。因此作用在电子上的静电力和压强梯度力必须达到平衡，这个条件导致玻尔兹曼关系。

3.6 习题及参考答案

1. 简述研究流体运动的两种方法。

- **Lagrange 法**：将流体分为大量的流体质点，研究流场中个别流体质点在不同的时间其位置、流速、压力的变化。
- **Euler 法**：着眼于空间点，研究每一个空间点上流体流过时的速度 (压力、密度等) 随时间的变化情况或是某一时刻各空间点上流体速度分布。

2. 写出物质导数，解释每一项的意义。

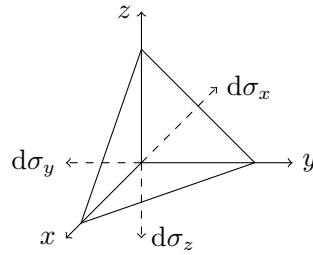
$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) A$$

右边第一项来源于场的非常定性，第二项来源于场的非均匀性。

3. 简述体积力和表面力，举例说明。

- **体积力**是长程力，可以穿越空间作用到流体元上；体积力是空间点的单值函数。(e.g. 重力、电磁力、惯性力)
- **表面力**是短程力，只有相互接触才有作用；表面力随着受力面取向的不同而不同。(e.g. 压力、应力)

4. 证明：应力可以表示成小面元的单位法向矢量与某个张量的乘积。



在流体中取侧面平行于坐标轴的一小四面体流体元，设斜面积为 $d\sigma_n$ ，其余三面分别为 $d\sigma_x$ ， $d\sigma_y$ 和 $d\sigma_z$ ，则有

$$d\sigma_x = d\sigma_n \cdot \hat{e}_x = d\sigma_n \cos \theta_x = \alpha d\sigma_n$$

$$d\sigma_y = d\sigma_n \cdot \hat{e}_y = d\sigma_n \cos \theta_y = \beta d\sigma_n$$

$$d\sigma_z = d\sigma_n \cdot \hat{e}_z = d\sigma_n \cos \theta_z = \gamma d\sigma_n$$

令 $\mathbf{p}_n, \mathbf{p}_x, \mathbf{p}_y, \mathbf{p}_z$ 分别为作用在四个小面元上的应力，则作用在这些小面元上的表面力为

$$\mathbf{p}_n d\sigma_n \quad \mathbf{p}_x d\sigma_x \quad \mathbf{p}_y d\sigma_y \quad \mathbf{p}_z d\sigma_z$$

作用在流体元上的体积力为 $\mathbf{F}\rho d\tau$ ，于是有

$$\mathbf{F}\rho d\tau + \mathbf{p}_n d\sigma_n - \mathbf{p}_x d\sigma_x - \mathbf{p}_y d\sigma_y - \mathbf{p}_z d\sigma_z = \dot{\mathbf{u}}\rho d\tau$$

由于流体元的体积无穷小，上式含有体积元的项可忽略，于是

$$\mathbf{p}_n d\sigma_n - \mathbf{p}_x d\sigma_x - \mathbf{p}_y d\sigma_y - \mathbf{p}_z d\sigma_z = 0$$

则有

$$\mathbf{p}_n = \alpha \mathbf{p}_x + \beta \mathbf{p}_y + \gamma \mathbf{p}_z$$

在坐标轴上的投影为

$$p_{nx} = \alpha p_{xx} + \beta p_{yx} + \gamma p_{zx}$$

$$p_{ny} = \alpha p_{xy} + \beta p_{yy} + \gamma p_{zy}$$

$$p_{nz} = \alpha p_{xz} + \beta p_{yz} + \gamma p_{zz}$$

九个应力 $(p_{xx}, p_{xy}, \dots, p_{zz})$ 的集合构成一个二阶张量，称为应力张量，表示为

$$\vec{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} p_{xx} & p_{yx} & p_{zx} \\ p_{xy} & p_{yy} & p_{zy} \\ p_{xz} & p_{yz} & p_{zz} \end{pmatrix}$$

故作用在任意一个以 \hat{e}_n 为单位矢量的斜面上的应力可以表示为

$$\mathbf{p} = \hat{e}_n \cdot \vec{\mathbf{P}}$$

5. 写出磁应力表达式，分析其特点（大小和方向）。

磁应力表达式为

$$\mathbf{T}_n = \frac{1}{\mu_0} \left[\mathbf{B}(\mathbf{B} \cdot \hat{e}_n - \frac{1}{2} B^2 \hat{e}_n) \right]$$

- 第一项为磁张力, 大小 $B^2 \cos \theta / \mu_0$, 其中 θ 为磁场与面元法向的夹角, 方向沿磁场方向。
- 第二项为磁压力, 大小 $B^2 / 2\mu_0$, 方向与面元法向相反。

6. 为什么说等离子体中的磁力线像弹性绳? “弹性”的来源是什么?

沿磁力线等离子体流管侧面有压力, 两端有张力, 完全像拉一根橡皮绳一样, 所以说在等离子体中, 磁力线像弹性绳; 实际上弯曲的磁场不均匀, 内侧磁场大于外侧, 相当于有一个向外的磁压差, 这个力差在平衡时恰好与两端的合张力平衡, 合力为零。弹性来源于磁场和等离子体洛伦兹力的作用。

7. 什么是磁扩散? 磁扩散的物理本质是什么?

磁扩散是由于电阻效应引起感应电流的衰减, 磁场将从强度大的区域向强度小的区域扩散。磁扩散的本质是电磁感应。在介质的某区域, 磁场的变化引起感应电场与电流, 此电流又产生磁场, 从而使磁场从强度大的区域向强度小的区域扩散。

8. 什么是磁冻结? 简述绝对磁冻结和相对磁冻结。

磁冻结严格表述为 (1) 通过和理想导电流体一起运动的任意封闭曲线所围面积的磁通守恒; (2) 在理想导电流体中, 起初在某磁感线上的流体元以后一直位于此磁感线上。

- (a) **绝对磁冻结**: 磁感线被冻结在等离子体流体元中, 不和等离子体产生相对运动, 等离子体流体元运动过程中将拖动磁感线一起运动, 磁感线形状发生变化;
- (b) **相对磁冻结**: 在等离子体流体元运动过程中, 磁感线可以进出等离子体流体元, 但等离子体流体元中磁感线根数不变。显然, 等离子体和磁感线有相对运动, 或者说等离子体会切割磁感线, 相对磁冻结会在等离子体内部建立电场。

9. 试证明通过随理想导电流体 ($\sigma \rightarrow \infty$) 一起运动的任何封闭回线所围成的曲面的磁通量是常数。

对于理想导电流体, 磁感应方程为

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

磁通变化率

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt} &= \iint \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \oint \mathbf{B} \cdot (\mathbf{u} \times d\mathbf{l}) \\ &= \iint \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} - \oint (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \\ &= \iint \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} - \iint \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} \\ &= \iint \left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \right] \cdot d\mathbf{S} = 0 \end{aligned}$$

故 $\Phi = \text{const}$, 证毕。

10. 抗磁漂移的根源是什么?

抗磁漂移来源于应力 ∇p 的不均匀性。

4 等离子体中的波

在等离子体中同时存在三种力：热压力、静电力和磁场力，它们对等离子体中粒子的扰动都起着弹性恢复力的作用，因此等离子体的波动现象十分丰富，存在着声波（热压力驱动）、纵波（静电力驱动）、横波（电磁力驱动），以及它们的混杂波。

4.1 等离子体方程组

电动力学方程组	麦克斯韦方程组	$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho_q}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0\end{aligned}$
	洛伦兹力公式	$\mathbf{f} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$
	欧姆定律	$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$
流体力学基本方程组	连续性方程	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$
	运动方程	$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p + \rho_q \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}$
	能量方程	$\rho \frac{d}{dt} \left(\epsilon + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) = \nabla \cdot (\vec{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} - \nabla \cdot \mathbf{q}$
等离子体双流体方程组	连续性方程	$\frac{\partial n_j}{\partial t} + \nabla \cdot (n \mathbf{u}_j) = 0$
	运动方程	$n_j m_j \frac{d\mathbf{u}_j}{dt} + \nabla p_j = en_j (\mathbf{E} + \mathbf{u}_j \times \mathbf{B}) + \nu_{jk} n_j \frac{m_j m_k}{m_j + m_k} (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_k)$
	广义欧姆定律	$\mathbf{J} = \sigma \left[(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{en} \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \frac{1}{en} \nabla p_e \right]$
状态方程	状态方程	$p \rho^{-\gamma} = \text{const}$

4.2 波动的概念

4.2.1 波的表示方法

任何物理量的波动可表示为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (4.1)$$

4.2.2 群速度和相速度

假设两列波

$$E_1 = E_0 \cos[(k + \Delta k)x - (\omega + \Delta \omega)t] \quad (4.2)$$

$$E_2 = E_0 \cos[(k - \Delta k)x - (\omega - \Delta \omega)t] \quad (4.3)$$

两列波叠加后为

$$E = E_1 + E_2 = 2E_0 \cos(\Delta kx - \Delta \omega t) \cos(kx - \omega t) \quad (4.4)$$

群速度和相速度分别为

$$v_g = \frac{dx}{dt} = \frac{d\omega}{dk} \quad v_p = \frac{\omega}{k} \quad (4.5)$$

群速度是包络线的运动速度，包络线携带信息，因此群速度不能超过光速。相速度是相位的传播速度，不携带任何信息，可以超过光速。

由 $\omega = kv_p$ 和 $k = 2\pi/\lambda$ ，得到瑞利群速公式

$$v_g = \frac{d(kv_p)}{dk} = v_p + k \frac{dv_p}{dk} = v_p - \lambda \frac{dv_p}{d\lambda} \quad (4.6)$$

- 当 $dv_p/d\lambda = 0$ 时, 有 $v_g = v_p$, 称介质为无色散;
- 当 $dv_p/d\lambda > 0$ 时, 有 $v_g < v_p$, 称介质为正常色散;
- 当 $dv_p/d\lambda < 0$ 时, 有 $v_g > v_p$, 称介质为反常色散;

4.2.3 波的偏振

波的偏振即波的极化, 是指空间某固定点的波矢量 \mathbf{E} 的端点在 $2\pi/\omega$ 时间内的轨迹。假设电磁波沿 x 方向传播, 电场一般可以写成

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= (E_y \hat{\mathbf{e}}_y + E_z \hat{\mathbf{e}}_z) \exp[i(kx - \omega t)] \\ &= (E_{y0} e^{i\alpha} \hat{\mathbf{e}}_y + E_{z0} e^{i\beta} \hat{\mathbf{e}}_z) \exp[i(kx - \omega t)] \\ &= \frac{\delta = \beta - \alpha}{\delta = \beta - \alpha} (E_{y0} \hat{\mathbf{e}}_y + E_{z0} e^{i\delta} \hat{\mathbf{e}}_z) \exp[i(kx - \omega t + \alpha)]\end{aligned}\quad (4.7)$$

空间每一个固定点上的电场矢量随时间在垂直于 x 轴的平面内旋转, 其矢端的轨迹是一个椭圆。

4.2.4 色散关系

等离子体中的波动是关于均匀介质的小振幅波动, 可将基本方程线性化, 并进行时空的 Fourier 变换, 这样可以得到一套场变量 Fourier 振幅的线性齐次方程组, 它们存在非零解的条件是系数组成的行列式为零, 由此可以得到波的角频率 ω 和波矢 k 之间的关系式 $f(k, \omega) = 0$, 进一步可以接出 ω 或 k , 得到色散关系

$$\omega = \omega(k) \quad k = k(\omega)$$

4.3 磁流体力学波

力学波是由应力引起的声波 (e.g. 热应力 ∇p , 磁应力 B^2/μ_0)。

4.3.1 中性气体中的声波

中性气体中的声振荡以热动压力为恢复力, 声速与粒子热运动速度同数量级。忽略粘滞力, 描写中性气体的方程只有连续性方程、运动方程和状态方程, 即

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (4.8)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p \quad (4.9)$$

$$p\rho^{-\gamma} = \text{const} \quad (4.10)$$

考虑偏离平衡的小扰动

$$Q(\mathbf{r}, t) = Q_0 + Q_1(\mathbf{r}, t) \quad (4.11)$$

下标 0 表示该物理量的平衡值, 下标 1 表示小振幅的扰动量, 代入方程组, 略去二阶小量, 得到

$$\frac{d\rho_1}{dt} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0 \quad (4.12)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = -\frac{\gamma p_0}{\rho_0} \nabla \rho_1 \quad (4.13)$$

假设小振幅扰动为简谐波形式, $\partial/\partial t \rightarrow -i\omega$, $\nabla \rightarrow i\mathbf{k}$, 方程组化为

$$-i\omega\rho_1 + i\rho_0\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_1 = 0 \quad (4.14)$$

$$-i\omega\rho_0\mathbf{u}_1 = -i\mathbf{k}\frac{\gamma p_0}{\rho_0}\rho_1 \quad (4.15)$$

联立解得

$$\left(\omega^2 - k^2\frac{\gamma p_0}{\rho_0}\right)\mathbf{u}_1 = 0 \quad (4.16)$$

方程有解的条件是

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \quad (4.17)$$

这也是中性气体中声波的色散关系。声波的相速度为

$$v_s = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} \quad (4.18)$$

4.3.2 阿尔芬波

前面我们讨论过, 当磁场存在时, 磁流体会受到一个沿着磁感线方向的张力 (磁张力 B_0^2/μ_0), 当磁流体在垂直于磁场方向出现扰动时, 磁感线像一根有质量的弹性弦, 磁感线拉长, 张力增强, 磁场增大。沿着磁感线传播的波会带动磁流体元一起运动, 这种扰动会沿着磁场方向产生一支由磁张力决定的力学波——阿尔芬波。

考虑处于均匀恒定外磁场 \mathbf{B}_0 中的均匀无界等离子体, 假定等离子体是无粘的和理想导电的, 但是可压缩的。我们研究其中的低频波, 于是可以忽略电子的运动。不考虑热应力, 因此不需要连续性方程和状态方程。

$$\rho\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (4.19)$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = 0 \quad (4.20)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (4.21)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0\mathbf{J} \quad (4.22)$$

考虑偏离平衡的小扰动

$$Q(\mathbf{r}, t) = Q_0 + Q_1(\mathbf{r}, t) \quad (4.23)$$

下标 0 表示该物理量的平衡值, 下标 1 表示小振幅的扰动量, 代入方程组, 略去二阶小量, 得到

$$\rho\frac{d\mathbf{u}_1}{dt} = \mathbf{J}_1 \times \mathbf{B}_0 \quad (4.24)$$

$$\mathbf{E}_1 + \mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0 = 0 \quad (4.25)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 = -\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} \quad (4.26)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}_1 = \mu_0\mathbf{J}_1 \quad (4.27)$$

对方程组进行傅立叶展开, 得

$$-i\omega\rho\mathbf{u}_1 = \mathbf{J}_1 \times \mathbf{B}_0 \quad (4.28)$$

$$\mathbf{E}_1 + \mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0 = 0 \quad (4.29)$$

$$i\mathbf{k} \times \mathbf{E}_1 = i\omega\mathbf{B}_1 \quad (4.30)$$

$$i\mathbf{k} \times \mathbf{B}_1 = \mu_0 \mathbf{J}_1 \quad (4.31)$$

整理得

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{B_0^2}{\mu_0 \rho} \quad (4.32)$$

即阿尔芬波的色散关系。阿尔芬波的相速度为

$$v_A = \sqrt{\frac{B_0^2}{\mu_0 \rho}} \quad (4.33)$$

比较中性气体声速和阿尔芬波速可以发现 B_0^2/μ_0 相当于应力 p ，而 B_0^2/μ_0 恰恰就是磁张力。故阿尔芬波是由磁张力引起的沿着磁感线传播的波。

4.3.3 磁流体力学波

考虑处于均匀恒定外磁场 $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{e}_z$ 中的均匀无界等离子体，假定等离子体是无粘的和理想导电的，但是是可压缩的。我们研究其中的低频波，于是可以忽略电子的运动，只需列出单流体方程组。考虑绝热过程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (4.34)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -v_s^2 \nabla \rho + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (4.35)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (4.36)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (4.37)$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = 0 \quad (4.38)$$

其中声速 $v_s^2 = \gamma p / \rho$ 。考虑偏离平衡的小扰动

$$Q(\mathbf{r}, t) = Q_0 + Q_1(\mathbf{r}, t) \quad (4.39)$$

下标 0 表示该物理量的平衡值，下标 1 表示小振幅的扰动量，代入方程组，略去二阶小量，得到

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0 \quad (4.40)$$

$$\rho_0 \frac{d\mathbf{u}_1}{dt} = -v_s^2 \nabla \rho_1 + \mathbf{J}_1 \times \mathbf{B}_0 \quad (4.41)$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}_1) - \nabla^2 \mathbf{E}_1 = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}_1}{\partial t} \quad (4.42)$$

$$\mathbf{E}_1 + \mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0 = 0 \quad (4.43)$$

对上述方程组进行 Fourier 展开，得到

$$-i\omega \rho_1 + i\rho_0 \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_1 = 0 \quad (4.44)$$

$$-i\omega \rho_0 \mathbf{u}_1 = -iv_s^2 \rho_1 \mathbf{k} + \mathbf{J}_1 \times \mathbf{B}_0 \quad (4.45)$$

$$-\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_1) + k^2 \mathbf{E}_1 = i\mu_0 \omega \mathbf{J}_1 \quad (4.46)$$

$$\mathbf{E}_1 + \mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0 = 0 \quad (4.47)$$

消去 $\mathbf{E}_1, \mathbf{J}_1, \rho_1$ 得

$$\omega^2 \mathbf{u}_1 = v_s^2 \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_1) + \frac{1}{\mu_0 \rho_0} \left\{ k^2 [\mathbf{B}_0 \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0)] - (\mathbf{B}_0 \times \mathbf{k}) [\mathbf{k} \cdot (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{B})] \right\} \quad (4.48)$$

令 $\mathbf{k} = k \hat{\mathbf{e}}_k$, 整理得

$$(v_p^2 - v_A^2) \mathbf{u}_1 = v_s^2 \hat{\mathbf{e}}_k (\hat{\mathbf{e}}_k \cdot \mathbf{u}_1) - v_A^2 \left\{ k^2 [\hat{\mathbf{e}}_z \times (\mathbf{u}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_z)] + (\hat{\mathbf{e}}_z \times \hat{\mathbf{e}}_k) [\mathbf{u}_1 \cdot (\hat{\mathbf{e}}_z \times \hat{\mathbf{e}}_k)] \right\} \quad (4.49)$$

其中 $v_p = \omega/k$ 是磁流体力学波的相速度, $v_A = \sqrt{B_0^2/\mu_0 \rho_0}$ 是阿尔芬速度。由于均匀恒定外磁场 \mathbf{B}_0 沿 z 轴, 不失一般性可设波矢 \mathbf{k} 位于 $y-z$ 平面, 若 \mathbf{B}_0 与 \mathbf{k} 的夹角为 θ , 则

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{e}}_k = \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_y + \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_z \\ \hat{\mathbf{e}}_z \times \hat{\mathbf{e}}_k = -\sin \theta \hat{\mathbf{e}}_x \end{cases} \quad (4.50)$$

方程 (4.49) 可写成分量形式

$$\begin{cases} (v_p^2 - v_A^2 \cos^2 \theta) u_{1x} = 0 \\ (v_p^2 - v_A^2 - v_s^2 \sin^2 \theta) u_{1y} - v_s^2 \sin \theta \cos \theta u_{1z} = 0 \\ -v_s^2 \sin \theta \cos \theta u_{1y} + (v_p^2 - v_s^2 \cos^2 \theta) u_{1z} = 0 \end{cases} \quad (4.51)$$

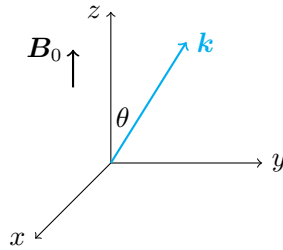
方程组有非平庸解的条件是系数行列式为零, 即

$$\begin{vmatrix} v_p^2 - v_A^2 \cos^2 \theta & 0 & 0 \\ 0 & v_p^2 - v_A^2 - v_s^2 \sin^2 \theta & -v_s^2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 & -v_s^2 \sin \theta \cos \theta & v_p^2 - v_s^2 \cos^2 \theta \end{vmatrix} = 0 \quad (4.52)$$

该方程有 3 个解, 分别为

$$v_p^2 = v_{pA}^2 = v_A^2 \cos^2 \theta \quad v_p^2 = v_{p\pm}^2 = \frac{1}{2}(v_s^2 + v_A^2) \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4v_s^2 v_A^2 \cos^2 \theta}{(v_s^2 + v_A^2)^2}} \right] \quad (4.53)$$

下面分两种情况讨论这三个解。



• 斜阿尔芬波

$$v_{pA} = \frac{\omega}{k} = \pm v_A \cos \theta \quad (4.54)$$

$$v_{gA} = \frac{d\omega}{dk} = \pm v_A \cos \theta \quad (4.55)$$

其中 $v_A = \sqrt{B_0^2/\mu_0 \rho_0}$ 是阿尔芬速度。斜阿尔芬波的相速度与声速无关, 即与等离子体热压强无关。相速度与群速度相等, 阿尔芬波是无色散的。速度分量为

$$u_{1x} \neq 0 \quad u_{1y} = 0 \quad u_{1z} = 0$$

扰动速度矢量垂直于波的传播方向, 故斜阿尔芬波是横波。

(1) $\mathbf{k} // \mathbf{B}_0$, $\theta = 0$ (沿磁感线方向传播的波), 相速度 $v_p = v_A$, 称为阿尔芬波。

(2) $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0$, $\theta = \pi/2$ (垂直于磁感线方向传播的波), 相速度为零, 无法传播。

• 磁声波

$$v_{p\pm}^2 = \frac{1}{2}(v_s^2 + v_A^2) \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4v_s^2 v_A^2 \cos^2 \theta}{(v_s^2 + v_A^2)^2}} \right] \quad (4.56)$$

其中 $v_s = \sqrt{\gamma p / \rho}$ 是声速, $v_A = \sqrt{B_0^2 / \mu_0 \rho_0}$ 是阿尔芬速度。在这两个模式的波中, 磁张力和等离子体热压强同时起作用, 称它们为磁声波。速度分量为

$$u_{1x} = 0 \quad u_{1y} \neq 0 \quad u_{1z} \neq 0$$

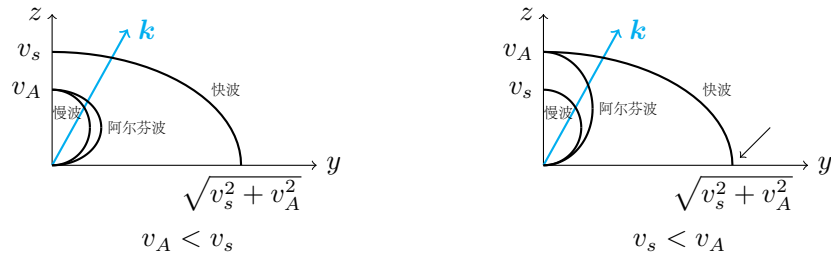
一般情况下, 它们既不是横波, 也不是纵波。若

$$\frac{v_s^2 v_A^2 \cos^2 \theta}{(v_s^2 + v_A^2)^2} \ll 1 \quad (4.57)$$

即 $\cos \theta \ll 1$ 或 $v_s \ll v_A$ 或 $v_A \ll v_s$, 则可以得到两个近似解

$$v_{p\pm}^2 \approx \frac{1}{2}(v_s^2 + v_A^2) \left\{ 1 \pm \left[1 - \frac{2v_s^2 v_A^2 \cos^2 \theta}{(v_s^2 + v_A^2)^2} \right] \right\} \Rightarrow \begin{cases} \text{快波} & v_{p+}^2 \approx v_s^2 + v_A^2 \\ \text{慢波} & v_{p-}^2 \approx \left(\frac{v_s^2 v_A^2}{v_s^2 + v_A^2} \right) \cos^2 \theta \end{cases} \quad (4.58)$$

显然 $v_{p-} \ll v_{p+}$, 且有 $v_{p-} < v_{pA} < v_{p+}$ 。



以下讨论几种特殊情况:

(1) $\mathbf{k} // \mathbf{B}_0$, $\theta = 0$ (沿磁感线方向传播的波)

— 当 $v_s > v_A$ 时, $v_{pA} = v_A$, $v_{p+} = v_s$, $v_{p-} = v_A$

— 当 $v_s < v_A$ 时, $v_{pA} = v_A$, $v_{p+} = v_A$, $v_{p-} = v_s$

(2) $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0$, $\theta = \pi/2$ (垂直于磁感线方向传播的波)

$$v_{p+} = \sqrt{v_s^2 + v_A^2} \quad v_{pA} = v_{p-} = 0 \quad (4.59)$$

这时, 原来的慢波和中间波模式消失, 只剩下一支原来的快波, 此波称为磁声波。

4.3.4 阿尔芬波和磁声波的直观物理图像

分析磁场在波运动过程中所起的作用。由

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (4.60)$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = 0 \quad (4.61)$$

得到

$$\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0) \quad (4.62)$$

由于 $\mathbf{B}_1, \mathbf{u}_1$ 的形式为 $\exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$, 上式可写成

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_0 \left(\frac{\mathbf{k}}{\omega} \cdot \mathbf{u}_1 \right) - \mathbf{u}_1 \left(\frac{\mathbf{k}}{\omega} \cdot \mathbf{B}_0 \right) \quad (4.63)$$

即

$$\mathbf{B}_1 = \begin{cases} \frac{k}{\omega} u_1 \mathbf{B}_0 & \mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0, \quad \mathbf{k} // \mathbf{u}_1 \text{ 磁声波 (纵波)} \\ 0 & \mathbf{k} // \mathbf{B}_0, \quad \mathbf{k} // \mathbf{u}_1 \text{ 声波 (纵波)} \\ -\frac{k}{\omega} B_0 \mathbf{u}_1 & \mathbf{k} // \mathbf{B}_0, \quad \mathbf{k} \perp \mathbf{u}_1 \text{ 阿尔芬波 (横波)} \end{cases} \quad (4.64)$$

1. 垂直于磁感线传播的磁声波 (纵波), 由于 $\mathbf{B}_1 // \mathbf{B}_0$, 将引起磁感线的疏密变化。于是各地的磁压强也随时间变化, 此时除了压缩而引起的热压力恢复力外, 磁压强引起的恢复力也起作用, 因此磁声波的相速度大于普通声速。
2. 沿着磁感线传播的阿尔芬波 (横波), 由于 $\mathbf{B}_1 \perp \mathbf{B}_0$, 此时磁感线不再平直, 而变为弯曲的。由于磁感线有张力, 于是这个张力起着弹性恢复力的作用, 使流体元在平衡位置附近振动, 从而产生沿磁感线方向传播的波。

值得注意的是, 在实际的等离子体中, 由于恢复力的复杂性, 声波、斜阿尔芬波、磁声波总是同时存在的。

4.4 非磁化等离子体中的波

4.4.1 等离子体振荡与朗缪尔波

如果等离子体受到扰动, 电子以特征频率在均匀的离子本底中振荡, 这个特征频率被认为是等离子体频率

$$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m_e}} \quad (4.65)$$

假设离子质量无穷大, 即它们根本不动, 只在空间形成均匀的背景, 密度为 n_0 。同时忽略磁场, 并称这样的等离子体为非磁化等离子体。这时我们只需四个方程: 连续性方程、运动方程、Poisson 方程、状态方程, 即

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \mathbf{u}_e) = 0 \quad (4.66)$$

$$n_e m_e \left[\frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial t} + (\mathbf{u}_e \cdot \nabla) \mathbf{u}_e \right] = -en_e \mathbf{E} - \nabla p_e \quad (4.67)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{e}{\varepsilon_0}(n_i - n_e) \quad (4.68)$$

$$p_e n_e^{-\gamma} = \text{const} \quad (4.69)$$

假设扰动前等离子体是静止的，将扰动后物理量写成平衡值和扰动部分之和 $Q = Q_0 + Q_1$ 。我们考虑朗缪尔长波，可以认为波动过程是绝热的，这相当于要求波相速度远大于电子的热速度，即 $\omega/k \gg v_{the}$ 或 $k\lambda_D \ll 1$ ($\lambda_D = v_{the}/\sqrt{2}\omega_{pe}$ 为电子的 Debye 长度)。另外，假定碰撞频率远小于扰动频率，则在 x 方向上的波的能量不会被分配到另外两个方向上，所以在波的传播方向上可以看成是一维问题， $\gamma_e = (2 + N)/N = 3$ 。

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + n_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0 \quad (4.70)$$

$$n_0 m_e \frac{\partial u_1}{\partial t} = -en_e E_1 - \gamma_e k_B T_e \frac{\partial n_1}{\partial x} \quad (4.71)$$

$$\frac{\partial E_1}{\partial x} = -\frac{e}{\varepsilon_0} n_1 \quad (4.72)$$

整理得

$$\omega^2 = \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m_e} + \gamma_e k^2 \frac{k_B T_e}{m_e} = \omega_{pe}^2 + \frac{\gamma_e}{2} k^2 v_{the}^2 = \omega_{pe}^2 (1 + \gamma_e k^2 \lambda_D^2) \quad (4.73)$$

其中

$$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m_e}} \quad v_{the} = \sqrt{\frac{2k_B T_e}{m_e}} \quad (4.74)$$

- 对于冷等离子体， $k_B T_e = 0$ ，色散关系为

$$\omega = \omega_{pe} = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m_e}} \quad (4.75)$$

在某种程度上，这种振荡很难被认为是一种“正常”的波，因为它不能传播能量或信息。

1. 对所有的波矢 \mathbf{k} ， $\omega = \omega_{pe}$
2. 相速度 v_p 可以取任何值
3. 群速度 $v_g = 0$

- 对于热等离子体，色散关系

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + \frac{3}{2} k^2 v_{the}^2 \quad (4.76)$$

显然，当 $\omega > \omega_{pe}$ 时，朗缪尔波才能传播。群速度为

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{3}{\sqrt{2}} (k\lambda_D) v_{the} \quad (4.77)$$

故总有 $v_g < v_{the} < v_p$ 。对于长波极限， $k\lambda_D \ll 1$ ，群速度远小于电子的热速度。当波的频率增加到电子振荡频率的两倍时， $k\lambda_{De} \approx 1$ ，即波进入短波区，这时有 $\omega^2 \approx k^2 v_{the}^2$ ，波的相速度与电子的热速度很接近，波与粒子发生强烈的相互作用，这时流体理论不再成立。由等离子体动理论知，对于平衡分布是麦克斯韦分布的等离子体，短波朗缪尔波是强阻尼的。朗缪尔波的传播频率宽度量级为 $\Delta\omega \approx \omega_{pe}$ 。

4.4.2 离子等离子体波

上一节我们讨论了不含离子效应的高频波，这一节我们来讨论低频波。由于离子的运动，电子也要随着离子一起运动，以保持等离子体的电中性。因此，要完全描述这些波需要涉及到电子和离子的运动行为，所需的方程为：离子和电子的连续性方程、运动方程、Poisson 方程、状态方程（认为过程是绝热的），即

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \mathbf{u}_e) = 0 \quad (4.78)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \mathbf{u}_i) = 0 \quad (4.79)$$

$$n_0 m_e \frac{d\mathbf{u}_e}{dt} + \nabla p_e = -en_0 \mathbf{E} \quad (4.80)$$

$$n_0 m_i \frac{d\mathbf{u}_i}{dt} + \nabla p_i = en_0 \mathbf{E} \quad (4.81)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{e(n_i - n_e)}{\epsilon_0} \quad (4.82)$$

$$p_e n_e^{-\gamma_e} = \text{const} \Rightarrow \nabla p_e = \gamma_e k_B T_e \nabla n_e \quad (4.83)$$

$$p_i n_i^{-\gamma_i} = \text{const} \Rightarrow \nabla p_i = \gamma_i k_B T_i \nabla n_i \quad (4.84)$$

设变量只在 x 方向发生变化，忽略电子惯性项，将方程组线性化，得到

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{\gamma_i k_B T_i}{m_i} + \frac{\gamma_e k_B T_e}{m_i (1 + \gamma_e k^2 \lambda_{De}^2)} \quad (4.85)$$

- 当 $k^2 \lambda_{De}^2 = (2\pi \lambda_{De} / \lambda)^2 \ll 1$ ，即长波近似条件下，得到离子声波的色散关系

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{\gamma_i k_B T_i}{m_i} + \frac{\gamma_e k_B T_e}{m_i} \quad (4.86)$$

定义离子声速

$$v_s = \sqrt{\frac{\gamma_i k_B T_i}{m_i} + \frac{\gamma_e k_B T_e}{m_i}} \quad (4.87)$$

于是色散关系可表示为 $\omega^2 = k^2 v_s^2$ 。从表达式可以看出，在等离子体中驱动离子声波有两种力：**离子的热压力和电荷分离的静电力**。当等离子体离子受到低频扰动而形成稠密和稀疏的区域时，一方面由于离子的热运动使离子扩散，这对应于 v_s 式的第一项，这一项与中性气体驱动力是类似的：

$$c_s = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{\gamma k_B T}{m_i}} \quad (4.88)$$

与中性气体中的声波相比，我们发现当气体温度趋于零时，中性气体中声波是不存在的；而当等离子体温度为零时，离子声波仍然存在。考虑到对于低频波，电子的压缩过程是等温的，取 $\gamma_e = 1$ ，这时离子声速为

$$v_s = \sqrt{\frac{k_B T_e}{m_i}} \quad (4.89)$$

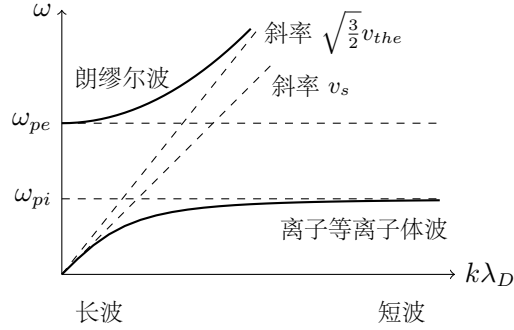
另一方面，从电子和离子运动方程可以看出，声速中的第二项是由**电场力**引起，当等离子体出现扰动，电子运动较快，某一区域会出现离子过剩，而离子的过剩会产生电场，这个电场又受到周围电子的屏蔽，然而这个屏蔽效应是不完全的，这个电场作用在离子上使离子由稠密区向稀疏区运动。值得注意的是：从电子的运动方程可以看出，这个过程中所产生的电场与电子的热压力是平衡的，所以，这里的离子波叫**声波**，而非静电波。一般的试验条件下，德拜长度非常小，所以对于波长远大于德拜长度的低频波，等离子体会出现离子声波。

- 当 $k^2 \lambda_{De}^2 = (2\pi \lambda_{De}/\lambda)^2 \gg 1$, 即短波近似条件下, 得到的色散关系

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{\gamma_i k_B T_i}{m_i} + \frac{k_B T_e}{m_i \lambda_{De}^2} = \omega_{pi}^2 + \frac{1}{2} k^2 \gamma_i^2 v_{thi}^2 \quad (4.90)$$

这就是在短波近似条件下离子静电波的色散关系, 和长波近似条件下电子静电波的色散关系形式一样

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + \frac{1}{2} k^2 \gamma_e v_{the}^2 \quad (4.91)$$



4.4.3 电磁波

在非磁化均匀等离子体中, 除了上述两支静电波外, 还存在一支高频电磁波。这时等离子体中除了扰动电场 \mathbf{E}_1 外还有扰动磁场 \mathbf{B}_1 , 它们通过电磁感应的方式在等离子体中传播, 并且可以脱离等离子体而传播开去。电磁波是横波, 传播方向 \mathbf{k} 与 \mathbf{E}_1 和 \mathbf{B}_1 垂直。描述非磁化等离子体中高频电磁波的线性方程组为

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 = -\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} \quad (4.92)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}_1 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{J}_1 \quad (4.93)$$

$$m_e n_0 \frac{\partial \mathbf{u}_{e1}}{\partial t} = -\nabla p_{e1} - en_0 \mathbf{E}_1 \quad (4.94)$$

$$\mathbf{J}_1 = -en_0 \mathbf{u}_{e1} \quad (4.95)$$

将 Eq.(4.93) 两边对 t 求导, 方程左边

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}_1) = \nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = -\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}_1) \quad (4.96)$$

方程右边

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_1}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}_1}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_1}{\partial t^2} - en_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{u}_{e1}}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_1}{\partial t^2} + \frac{\mu_0 e}{m_e} (\nabla p_{e1} + en_0 \mathbf{E}_1) \quad (4.97)$$

即

$$-\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}_1) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_1}{\partial t^2} = \frac{\mu_0 e^2 n_0}{m_e} \mathbf{E}_1 \quad (4.98)$$

取扰动量为平面波形式 $\exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$, 我们得到

$$(\omega^2 - k^2 c^2 - \omega_{pe}^2) \mathbf{E}_1 = 0 \quad (4.99)$$

于是

$$\omega^2 = k^2 c^2 + \omega_{pe}^2 \quad (4.100)$$

其中

$$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m_e}} \quad (4.101)$$

电磁波的相速度和群速度

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \sqrt{c^2 + \frac{\omega_{pe}^2}{k^2}} > c \quad v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2}{v_p} < c \quad (4.102)$$

即电磁波的相速度大于光速，群速度小于光速。

电磁波色散关系的一个重要特点是它的**截止现象**。当一束频率为 ω 的电磁波由真空入射到由边缘向里密度不断增加的非均匀等离子体时，随着波向里传播， ω_{pe} 不断增大，则 k^2 越来越小，波长越来越长；深入到等离子体一定深度时，有 $\omega = \omega_{pe}$ ， $k = 0$ ；继续深入 $\omega_{pe} > \omega$ ， k 变为虚数，波不能传播，这就是电磁波在等离子体中的截止现象，有

$$k = \frac{i}{c} \sqrt{\omega_{pe}^2 - \omega^2} = i\alpha \quad (4.103)$$

则

$$E(x, t) = E_0 e^{i(kx - \omega t)} = E_0 e^{-\alpha x} e^{-i\omega t} \quad (4.104)$$

趋肤深度

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{c}{\sqrt{\omega_{pe}^2 - \omega^2}} \quad (4.105)$$

截止现象的物理图像：

- 频率为 ω 的电磁波传入等离子体，其电矢量会在等离子体中激发频率为 ω_{pe} 的等离子体振荡，消耗一部分能量；剩下的能量才能继续传播。如果其能量都被等离子体振荡吸收，即 $\omega < \omega_{pe}$ ，就无法在等离子体中传播，将会被反射；
- 用微观图像解释，就是一个频率为 ω 的光子射入等离子体，要先激发一个频率为 ω_{pe} 的“等离子体激元”，然后其余下的能量才能继续传播。如果这个光子的能量不足以激发一个激元，就会被反射。

4.5 磁化等离子体中的静电波

在这一节中，我们要考虑零级未扰动磁场 \mathbf{B}_0 。为了方便起见，我们可以区分出六种不同的情况：

- 零级磁场相对于波矢的方向
 - 平行传播的波： $\mathbf{k} \times \mathbf{B}_0 = 0$
 - 垂直传播的波： $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 = 0$
- 波动电场相对于波矢的方向
 - 纵波： $\mathbf{k} \times \mathbf{E}_1 = 0$
 - 横波： $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_1 = 0$
- 是否有扰动磁场
 - 静电波，没有扰动磁场 $\mathbf{B}_1 = 0$
 - 电磁波，具有不为零的扰动磁场 $\mathbf{B}_1 \neq 0$

4.5.1 高混杂静电振荡和高混杂波 (静电电子波)

首先考虑均匀无界磁化冷等离子体中垂直于磁场的高频静电振荡，由于离子质量大，对高频振荡不能响应，离子形成一个密度为 n_0 ，带正电的均匀流体背景，由如下方程组描述

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \mathbf{u}_e) = 0 \quad (4.106)$$

$$m_e n_e \left(\frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial t} + \mathbf{u}_e \cdot \nabla \mathbf{u}_e \right) + e n_e (\mathbf{E} + \mathbf{u}_e \times \mathbf{B}) = 0 \quad (4.107)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{e(n_0 - n_e)}{\varepsilon_0} \quad (4.108)$$

线性化后得到

$$\frac{\partial n_{e1}}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_{e1} = 0 \quad (4.109)$$

$$m_e \frac{\partial \mathbf{u}_{e1}}{\partial t} + e(\mathbf{E}_1 + \mathbf{u}_{e1} \times \mathbf{B}_0) = 0 \quad (4.110)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{e}{\varepsilon_0} n_{e1} \quad (4.111)$$

得到色散关系

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + \omega_{ce}^2 = \omega_h^2 \quad (4.112)$$

其中 $\omega_{ce} = eB_0/m_e$ 为电子回旋频率， ω_h 为高混杂频率。忽略电子热运动，群速度为零，高频静电振荡不传播。

下面研究电子热运动对高混杂振荡的影响，只需要在线性化运动方程中增加电子热压力项即可，于是运动方程修改为

$$m_e n_e \left(\frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial t} + \mathbf{u}_e \cdot \nabla \mathbf{u}_e \right) + e n_e (\mathbf{E} + \mathbf{u}_e \times \mathbf{B}) + \nabla p_e = 0 \quad (4.113)$$

其中 $p_e = \gamma n T_e$ (状态方程)，对于二维情况， $\gamma = 2$ ，容易得到高混杂波的色散关系

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + \omega_{ce}^2 + k^2 v_{th}^2 = \omega_h^2 + k^2 v_{th}^2 \quad (4.114)$$

驱动高混杂波的有三个恢复力：静电力、洛伦兹力和电子热压力。显然群速度不为零，高混杂波是垂直于磁场的静电振荡通过电子热运动而传播的。

4.5.2 低混杂振荡和低混杂波 (静电离子波)

对于静电波 ($\mathbf{k} \times \mathbf{E}_1 = 0, \mathbf{B}_1 = 0$)，麦克斯韦方程中只需要 Poisson 方程

$$\frac{\partial n_{e1}}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_{e1} = 0 \quad (4.115)$$

$$m_e n_0 \frac{\partial \mathbf{u}_{e1}}{\partial t} + \gamma T_e \nabla n_{e1} + e n_0 (\mathbf{E}_1 + \mathbf{u}_{e1} \times \mathbf{B}_0) = 0 \quad (4.116)$$

$$\frac{\partial n_{i1}}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_{i1} = 0 \quad (4.117)$$

$$m_i n_0 \frac{\partial \mathbf{u}_{i1}}{\partial t} + \gamma T_i \nabla n_{i1} - e n_0 (\mathbf{E}_1 + \mathbf{u}_{i1} \times \mathbf{B}_0) = 0 \quad (4.118)$$

不失一般性，假设

$$\mathbf{k} = k(\sin \theta, 0, \cos \theta) \quad (4.119)$$

假设 $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{e}_z$, θ 是 \mathbf{k} 和 \mathbf{B}_0 之间的夹角。静电离子波的色散关系由下式给出

$$1 - \frac{k^2 v_s^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{ci}}{\omega} \tan^2 \theta \left\{ \left[\frac{\omega}{\omega_{ce}} \tan^2 \theta - \frac{\omega_{ce}}{\omega} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{ce}^2} \right) \right]^{-1} - \left[\frac{\omega}{\omega_{ci}} \tan^2 \theta - \frac{\omega_{ci}}{\omega} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{ci}^2} \right) \right]^{-1} \right\} = 0 \quad (4.120)$$

其中 ω_{ce} 为电子回旋频率, ω_{ci} 为离子回旋频率, v_s 为离子声速

$$\omega_{ce} = \frac{eB}{m_e} \quad \omega_{ci} = \frac{eB}{m_i} \quad v_s = \sqrt{\frac{\gamma_i k_B T_i}{m_i} + \frac{\gamma_e k_B T_e}{m_i}}$$

在长波近似下, 考虑一些特殊情况:

1. 平行磁场传播的静电离子波 ($\theta \rightarrow 0$), 则 $k = k_z$

- 若 $\omega^2 \neq \omega_{ce}^2$ 和 ω_{ci}^2 , 则方程化为

$$1 - \frac{k^2 v_s^2}{\omega^2} = 0 \quad (4.121)$$

即 $\omega = \pm k_z v_s$, 正好是离子声波, 磁场对于平行传播的波没有影响。

- 若 $\omega^2 = \omega_{ce}^2$ 或 ω_{ci}^2 , 平行传播分母趋于 0, 首先取极限 $\omega \rightarrow \omega_{ci}$, 我们得到离子回旋波的色散关系

$$1 - \frac{k^2 v_s^2}{\omega^2} - \frac{1}{1 - \cot^2 \theta (1 - \omega^2 / \omega_{ci}^2)} = 0 \quad (4.122)$$

同样当 $\omega \rightarrow \omega_{ce}$ 时, 得到电子回旋波的色散关系

$$1 - \frac{k^2 v_s^2}{\omega^2} - \frac{m_e / m_i}{1 - \cot^2 \theta (1 - \omega^2 / \omega_{ce}^2)} = 0 \quad (4.123)$$

2. 垂直磁场传播的静电离子波 ($\theta \rightarrow \pi/2$)

$$1 - \frac{k^2 v_s^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{ci} \omega_{ce}}{\omega^2} - \frac{\omega_{ci}^2}{\omega^2} = 0 \quad (4.124)$$

显然最后一项比第三项小得多, 可以忽略, 这样我们得到低混杂波的色散关系

$$\omega^2 = k^2 v_s^2 + |\omega_{ci} \omega_{ce}| \quad \omega^2 = 0 \quad (4.125)$$

低混杂频率是极光区离子加热的重要参数。

3. 近似垂直磁场传播的静电离子波 ($1 \gg k_z / k_x \gg \sqrt{m_e / m_i}$)

$$\omega^2 = k^2 v_s^2 + \omega_{ci}^2 \quad (4.126)$$

即静电离子回旋波 (EIC 波) 的色散关系。

4.6 磁化等离子体中的高频电磁波

为了简单起见, 可以略去离子的运动, 并设等离子体是冷的, 即 $T_e = T_i = 0$, 描述高频电磁波的线性化方程组为

$$m_e n_0 \frac{\partial \mathbf{u}_{ei}}{\partial t} + en_0 (\mathbf{E}_1 + \mathbf{u}_{e1} \times \mathbf{B}_0) = 0 \quad (4.127)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 = -\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} \quad (4.128)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}_1 = \mu_0 \mathbf{J}_1 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t} \quad (4.129)$$

$$\mathbf{J}_1 = -en_0 \mathbf{u}_{e1} \quad (4.130)$$

4.6.1 垂直于磁场传播的高频电磁波

- 寻常波 $\mathbf{E}_1 \parallel \mathbf{B}_0$ ，只需考虑 \mathbf{B}_0 方向的运动分量，寻常波色散关系为

$$\omega^2 = k^2 c^2 + \omega_{pe}^2 \quad (4.131)$$

- 非寻常波 $\mathbf{E}_1 \perp \mathbf{B}_0$ ，电子运动将受到 \mathbf{B}_0 的影响。不失一般性，假设波矢 \mathbf{k} 沿 x 方向，则

$$\mathbf{E}_1 = E_x \hat{e}_x + E_y \hat{e}_y \quad (4.132)$$

$$\mathbf{u}_{e1} = u_x \hat{e}_x + u_y \hat{e}_y \quad (4.133)$$

得到方程组

$$-i\omega m_e u_{ex} + eE_x + eu_{ey} B_0 = 0 \quad (4.134)$$

$$-i\omega m_e u_{ey} + eE_y - eu_{ex} B_0 = 0 \quad (4.135)$$

$$-\omega B_z + kE_y = 0 \quad (4.136)$$

$$\mu_0 e n_0 u_{ey} + \frac{i\omega}{c^2} E_y - ik B_z = 0 \quad (4.137)$$

$$\mu_0 e n_0 u_{ex} + \frac{i\omega}{c^2} E_x = 0 \quad (4.138)$$

从上述方程组得到色散方程

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{\omega^2}{\omega_{pe}^2} & \frac{i\omega_{ce}}{\omega\omega_{pe}^2} (k^2 c^2 - \omega^2) \\ \frac{i\omega_{ce}\omega}{\omega_{pe}^2} & 1 + \frac{c^2 k^2}{\omega_{pe}^2} - \frac{\omega^2}{\omega_{pe}^2} \end{vmatrix} = 0 \quad (4.139)$$

利用折射率，可将方程写成

$$n^2 = \frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \frac{\omega^2 - \omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_h^2} \quad (4.140)$$

其中 ω_h 为上杂化频率， $\omega_h^2 = \omega_{pe}^2 + \omega_{ce}^2$ 。非寻常波是由部分横波和部分纵波构成的电磁波，它是椭圆偏振波。

- 当折射率为零时，即波长变为无穷大时，在等离子体中出现**截止**，波被反射。显然在 $\omega = \omega_{pe}$ 处发生截止。
- 当折射率变为无穷大时，即波长为零时，等离子体中发生**共振**，波被吸收。共振发生在等离子体中满足下列条件的点

$$\omega^2 = \omega_h^2 = \omega_{pe}^2 + \omega_{ce}^2 \quad (4.141)$$

在给定的波接近于共振点时，其相速度和群速度都趋于零，波能量转化为上杂化振荡。

一般来说，在截止点和共振点，波不能传播。

4.6.2 平行于磁场传播的高频电磁波

令 $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{e}_z$ ， $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0$ ，扰动电场 \mathbf{E}_1 具有横向分量

$$\mathbf{E}_1 = E_x \hat{e}_x + E_y \hat{e}_y \quad (4.142)$$

$$\mathbf{u}_{e1} = u_{ex} \hat{e}_x + u_{ey} \hat{e}_y \quad (4.143)$$

可以写出方程组

$$-i\omega m_e u_{ex} + eE_x + eu_{ey}B_0 = 0 \quad (4.144)$$

$$-i\omega m_e u_{ey} + eE_y - eu_{ex}B_0 = 0 \quad (4.145)$$

$$(\omega^2 - k^2c^2) E_x = \frac{ien_0\omega}{\varepsilon_0} u_{ex} \quad (4.146)$$

$$(\omega^2 - k^2c^2) E_y = \frac{ien_0\omega}{\varepsilon_0} u_{ey} \quad (4.147)$$

得到平行于磁场传播的回旋波的色散关系

$$n^2 = \frac{k^2c^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2(1 \pm \omega_{ce}/\omega)} \quad (4.148)$$

• 右旋圆偏振波 (R 波)

$$n^2 = \frac{k^2c^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2(1 - \omega_{ce}/\omega)} \quad (4.149)$$

R 波的电场矢量旋转方向与电子回旋方向相同。当 $\omega \rightarrow \omega_{ce}$ 时, R 波的折射率趋于无穷, R 波出现共振, 称为**电子回旋共振**。由于这时电场矢量旋转频率与电子回旋频率近似相等, 电场能有效地不断加速电子, 波能量转化为电子的动能。波的这种共振机制提供了加热等离子体的一条途径。另外, R 波还存在截止点, 即

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2(1 - \omega_{ce}/\omega)} = 0 \quad (4.150)$$

得到 R 波的截止频率

$$\omega_R = \frac{\omega_{ce}}{2} + \sqrt{\omega_{pe}^2 + \frac{\omega_{ce}^2}{4}} \quad (4.151)$$

• 左旋圆偏振波 (L 波)

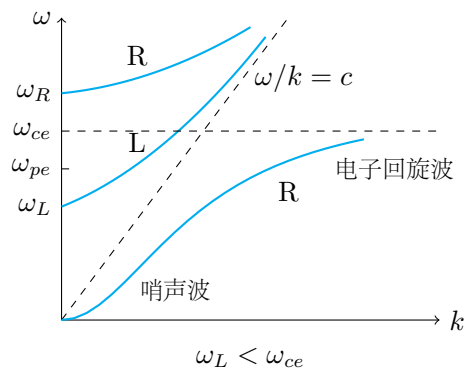
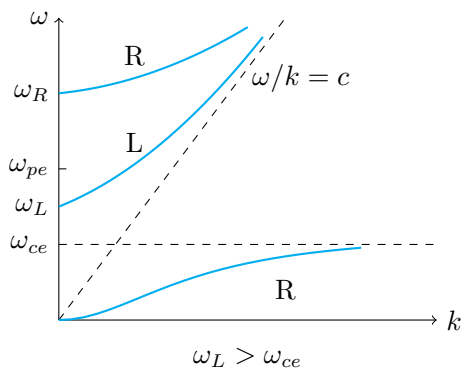
$$n^2 = \frac{k^2c^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2(1 + \omega_{ce}/\omega)} \quad (4.152)$$

L 波的电场矢量旋转方向与电子回旋方向相反, L 波不能与电子发生共振。L 波在 $\omega = \omega_{ci}$ 处发生**离子回旋共振**。因为 L 波的电场矢量旋转方向与离子旋转方向相同, 当它们频率接近的时候, 离子受到场的加速, 并不断吸收电场能量。L 波同样存在截止点, 即

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2(1 + \omega_{ce}/\omega)} = 0 \quad (4.153)$$

得到 L 波的截止频率

$$\omega_L = -\frac{\omega_{ce}}{2} + \sqrt{\omega_{pe}^2 + \frac{\omega_{ce}^2}{4}} \quad (4.154)$$



如图所示，L 波在低频时有一个截止带，它的行为与 O 波相似。R 波在 ω_R 与 ω_{ce} 之间有一个截止带；但存在第二个传播带，其频率低于 ω_{ce} ，这个低频区域称为哨声波 (whistler)，对研究电离层现象非常重要。

4.7 总结

静电波 $B_1 = 0$	电子	$\mathbf{k} // \mathbf{B}_0$ 或 $B_0 = 0$	朗缪尔波	$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + \frac{3}{2}k^2v_{the}^2$
		$\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0$	高混杂振荡	$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + \omega_c^2 = \omega_h^2$
			高混杂波	$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + \omega_c^2 + k^2v_{the}^2 = \omega_h^2 + k^2v_{the}^2$
	离子	$\mathbf{k} // \mathbf{B}_0$ 或 $B_0 = 0$	离子声波	$\omega^2 = k^2v_s^2$
		$\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0$ (nearly)	静电离子回旋波	$\omega^2 = \omega_{ci}^2 + k^2v_s^2$
		$\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0$ (exactly)	低混杂振荡	$\omega^2 = k^2v_s^2 + \omega_{ci}\omega_{ce} , \omega^2 = 0$
电磁波 $B_1 \neq 0$	电子	$B_0 = 0$	光	$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + k^2c^2$
		$\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0, \mathbf{E}_1 // \mathbf{B}_0$	O 波	$\frac{c^2k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}$
		$\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0, \mathbf{E}_1 \perp \mathbf{B}_0$	X 波	$\frac{c^2k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \frac{\omega^2 - \omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_h^2}$
		$\mathbf{k} // \mathbf{B}_0$ (右旋)	R 波	$\frac{c^2k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2/\omega^2}{1 - \omega_c/\omega}$
		$\mathbf{k} // \mathbf{B}_0$ (左旋)	L 波	$\frac{c^2k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2/\omega^2}{1 + \omega_c/\omega}$
	离子	$B_0 = 0$	None	
		$\mathbf{k} // \mathbf{B}_0$	阿尔芬波	$\omega^2 = k^2v_A^2$
		$\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0$	电磁波	$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + k^2c^2$

4.8 习题及参考答案

1. 什么是波的相速度和群速度？写出表达式。

- 相速度是相位的传播速度

$$v_p = \frac{\omega}{k} \quad (4.155)$$

- 群速度是波包的传播速度

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (4.156)$$

2. 阿尔芬波具有什么特点？从相速度表达式能否看其是如何产生的？

阿尔芬波是横波，其速度远小于光速，且不随波的频率而变化。

$$v_A = \sqrt{\frac{B_0^2}{\mu_0 \rho}}$$

比较中性气体声速与阿尔芬波速度可以发现， B_0^2/μ_0 相当于应力 p ，而 B_0^2/μ_0 恰恰就是磁张力。所以阿尔芬波是由磁张力引起的沿着磁感线传播的波。

3. 推导非磁化等离子体中电磁波色散关系，并描述截止现象。

电磁波是横波，有 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_1 = 0$ ， $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_1 = 0$ 。描述非磁化等离子体中高频电磁波的线性方程组为

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E}_1 &= -\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B}_1 &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{J}_1 \end{aligned}$$

$$m_e n_0 \frac{\partial \mathbf{u}_{e1}}{\partial t} = -\nabla p_{e1} - en_0 \mathbf{E}_1$$

$$\mathbf{J}_1 = -en_0 \mathbf{u}_{e1}$$

化简得到

$$-\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}_1) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_1}{\partial t^2} = \frac{\mu_0 e^2 n_0}{m_e} \mathbf{E}_1$$

取扰动量为平面波形式 $\exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$, 我们得到

$$(\omega^2 - k^2 c^2 - \omega_{pe}^2) \mathbf{E}_1 = 0$$

故电磁波色散关系为

$$\omega^2 = k^2 c^2 + \omega_{pe}^2$$

其中

$$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m_e}}$$

当一束频率为 ω 的电磁波由真空入射到由边缘向里密度不断增加的非均匀等离子体时, 随着波向里传播, ω_{pe} 不断增大, 则 k^2 越来越小; 深入到等离子体一定深度时, 有 $\omega = \omega_{pe}$, $k = 0$; 继续深入, 则 $\omega_{pe} > \omega$, k 变为虚数, 波不能传播。这就是电磁波在等离子体中的截止现象。

4. 等离子体频率是波的截止频率, 还是共振频率?

等离子体频率是电磁波的截止频率, 也是高频静电振荡的共振频率。截止与共振必须与波的模式相关。

5. 试证明, $T_i = 0$ 时, 线性化的双流方程所预言的离子声波频率为

$$\omega = kv_s (1 + \gamma_e k^2 \lambda_{De}^2)^{-1/2} \quad (4.157)$$

证明: 需要使用的方程有

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \mathbf{u}_e) = 0 \quad (4.158)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \mathbf{u}_i) = 0 \quad (4.159)$$

$$n_e m_e \frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial t} + \nabla p_e = -en_e \mathbf{E} \quad (4.160)$$

$$n_i m_i \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + \nabla p_i = en_i \mathbf{E} \quad (4.161)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{e(n_i - n_e)}{\epsilon_0} \quad (4.162)$$

考虑绝热过程

$$p_e n_e^{-\gamma} = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \nabla p_e = \gamma_e k_B T_e \nabla n_e \quad (4.163)$$

$$p_i n_i^{-\gamma} = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \nabla p_i = \gamma_e k_B T_i \nabla n_i \quad (4.164)$$

讲变量写成 $Q = Q_0 + Q_1$ 的形式, 设扰动前场是静止的, 即

$$\mathbf{u}_{e0} = 0 \quad \mathbf{u}_{i0} = 0 \quad n_{e0} = n_{i0} = n_0 \quad \mathbf{E}_0 = 0$$

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{u}_{e1} \quad \mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{i1} \quad n_e = n_{e0} + n_{e1} \quad n_i = n_{i0} + n_{i1} \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_1$$

考虑一维情况，由于电子质量小，忽略电子惯性项，略去二阶小量，得

$$\frac{\partial n_{i1}}{\partial t} + n_0 \frac{\partial u_{i1}}{\partial x} = 0 \quad (4.165)$$

$$\gamma_e k_B T_e \frac{\partial n_{e1}}{\partial x} + e n_0 E_1 = 0 \quad (4.166)$$

$$n_0 m_i \frac{\partial u_{i1}}{\partial t} + \gamma_i k_B T_e \frac{\partial n_{i1}}{\partial x} - e n_0 E_1 = 0 \quad (4.167)$$

$$\frac{\partial E_1}{\partial x} = \frac{e(n_{i1} - n_{e1})}{\varepsilon_0} \quad (4.168)$$

设小扰动为简谐波形式 $\exp[i(kx - \omega t)]$ ，即

$$-i\omega n_{i1} + i k n_0 u_{i1} = 0 \quad (4.169)$$

$$i k \gamma_e k_B T_e n_{e1} + e n_0 E_1 = 0 \quad (4.170)$$

$$-i\omega n_0 m_i u_{i1} + i k \gamma_i k_B T_e n_{i1} - e n_0 E_1 = 0 \quad (4.171)$$

$$i k E_1 = \frac{e(n_{i1} - n_{e1})}{\varepsilon_0} \quad (4.172)$$

整理得

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{\gamma_i k_B T_i}{m_i} + \frac{\gamma_e k_B T_e}{m_i (1 + \gamma_e k^2 \lambda_{De}^2)} \quad (4.173)$$

当 $T_i = 0$ 时，

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{\gamma_e k_B T_e}{m_i (1 + \gamma_e k^2 \lambda_{De}^2)} \quad (4.174)$$

即

$$\omega = k v_s (1 + \gamma_e k^2 \lambda_{De}^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (4.175)$$